AP : Nombres complexes

I- On considère les nombres complexes $a=1-i$ et $b=1+\sqrt{3}i$

1- Calculer le module et un argument des nombres *a* et *b*

2- On considère les nombres complexes $c=ab$ et $d=\dfrac{b}{a}$

a- Déterminer le module et un argument des nombres complexes *c* et *d*.

b- Déterminer la forme algébrique de *c* et *d*.

c- En déduire des valeurs exactes de sinus et cosinus de $\dfrac{\pi}{12}$ et de $\dfrac{7\pi}{12}$.

II- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1- Résoudre $z^2-4z+6=0$

2- On désigne par C et D les points d'affixes $c=2+i\sqrt{2}$ et $d=2-i\sqrt{2}$.

a- Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{c-3}{c}$

b-On place B d'affixe 3. En déduire que le triangle OBC est rectangle.

3- Déterminer l'affixe du point A tel que CBAO soit un rectangle.

III- Extrait d'un QCM (où il fallait justifier) et d'un vrai-faux:

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a=2+2\mathrm{i},\quad b=-\sqrt{3}+\mathrm{i},\quad c=1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad d=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et}\quad e=-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3-

1. **Affirmation 1 :**
Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation
$$z-\overline{z}+2-4\mathrm{i}=0$$
admet une solution unique.

IV-On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0=\sqrt{3}-i$ et pour tout entier naturel n :
$z_{n+1}=(1+i)z_n$.

Partie A

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=|z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel *n*, exprimer u_n en fonction de *n*.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

5. Étant donné un réel positif *p*, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n>p$. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier *n*.	**Variables** : *u* est un réel *p* est un réel *n* est un entier **Initialisation** : Affecter à *n* la valeur 0 Affecter à *u* la valeur 2 **Entrée** : Demander la valeur de *p* **Traitement** : **Sortie** :

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer le module et un argument de z_0 et de 1 + i. En déduire ceux de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.