AP : Nombres complexes : Eléments de correction.

I- On considère les nombres complexes $a=1-i$ et $b=1+\sqrt{3}i$

1- Calculer le module et un argument des nombres *a* et *b*

$|a|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ *et de même* $|b|=2$ *et si on note* α *l'argument de a on obtient*

$\cos(\alpha)=\dfrac{\Re(a)}{|a|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\alpha)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ *d'où par lecture du cercle trigonométrique*

$\alpha=\dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$ *et on trouve de même* $arg(b)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

2- On considère les nombres complexes $c=ab$ et $d=\dfrac{b}{a}$

a- Déterminer le module et un argument des nombres complexes *c* et *d*.

$|c|=|ab|=|a|\times|b|=2\sqrt{2}$ *et* $|d|=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ *et pour l'argument*

$arg(c)=arg(ab)=arg(a)+arg(b)=\dfrac{-\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{12}[2\pi]$ *et* $arg(d)=arg(b)-arg(a)=\dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$

b- Déterminer la forme algébrique de *c* et *d*.

$c=(1-i)(1+i\sqrt{3})=1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$ *et*

$d=\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i)}=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

c- En déduire des valeurs exactes de sinus et cosinus de $\dfrac{\pi}{12}$ et de $\dfrac{7\pi}{12}$.

Comme $arg(c)=\dfrac{\pi}{12}$ *et que son cosinus est égal à* $\dfrac{\Re(c)}{|(c)|}$ *on obtient* $\cos(\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *et de même*

$\sin(\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ *puis avec les parties réelles , imaginaires et le module de d :* $\cos(\dfrac{7\pi}{12})=\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin(\dfrac{7\pi}{12})=\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

II- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1- Résoudre z²-4 z+6=0

On reconnaît un polynôme de degré 2 à coefficient réels, le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times6=-8$ *donc il y a deux solutions complexes conjuguées :*

$z_1=\dfrac{4-i\sqrt{8}}{2}=2-i\sqrt{2}$ *et* $z_2=2+i\sqrt{2}$

2- On désigne par C et D les points d'affixes $c=2+i\sqrt{2}$ et $d=2-i\sqrt{2}$.

a- Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{c-3}{c}$

$\dfrac{c-3}{c}=\dfrac{2+i\sqrt{2}-3}{2+i\sqrt{2}}=\dfrac{(-1+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})}{2^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{-2+i\sqrt{2}+2i\sqrt{2}+2}{6}=i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b-On place B d'affixe 3. En déduire que le triangle OBC est rectangle.

Il semble rectangle en C et en effet $\dfrac{c-3}{c}$ *est un imaginaire pur donc les vecteurs* $\vec{BC}$ *d'affixe c-3 et* $\vec{OC}$ *d'affixe c sont orthogonaux, il y a donc un angle droit en C.*

On peut aussi dire que $arg(\dfrac{c-3}{c})=(\vec{OC};\vec{BC})$ *et il vaut* $\dfrac{\pi}{2}$ *modulo* 2π *car* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in i\mathbb{R}$ *et* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$.

3- Déterminer l'affixe du point A tel que CBAO soit un rectangle.

On a déjà un angle droit, il suffit donc de trouver A tel que CBAO soit un parallélogramme, c.a.d tel que $\vec{CB}=\vec{OA}\Leftrightarrow b-c=a\Leftrightarrow 3-(2+i\sqrt{2})=a$ *et donc* $a=1-i\sqrt{2}$

III- Extrait de QCM (où il fallait justifier) et d'un vrai-faux:

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2i, \quad b = -\sqrt{3}+i, \quad c = 1+i\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)i.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

Affirmation 1 :
On peut tester si $\vec{AB}$ *et* $\vec{AC}$ *sont colinéaires,c.a.d s'il existe* $k\in\mathbb{R}$ *tel que b-a=k(c-a) or* $b-a=-\sqrt{3}-2-i$ *et* $c-a=-1+i(\sqrt{3}-2)$ *, il n'est pas évident de savoir si l'on peut passer de l'un à l'autre en multipliant par un réel, donc on calcule le quotient sous forme algébrique :*

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-\sqrt{3}-2-i}{-1+i(\sqrt{3}-2)}=\frac{(-\sqrt{3}-2-i)(-1-i(\sqrt{3}-2))}{(-1)^2+(\sqrt{3}-2)^2}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2+i(3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4+1)}{8-4\sqrt{3}}=\frac{4}{8-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

et donc c'est bien un réel, les vecteurs sont donc colinéaires.

<u>Rq :</u>

 # C'est un vrai faux de bac et si vous posez le bon calcul et demandez le résultat à la calculatrice, en remarquant que celui-ci est un réel, le correcteur doit considérer la réponse comme argumentée.

#C'est typiquement le type de question sur lequel les complexes ne servent à rien, on gagne à revenir à une méthode de seconde : la condition de colinéarité de $\vec{AB}(-\sqrt{3}-2;-1)$ *et* $\vec{AC}(-1;\sqrt{3}-2)$ *. On calcule alors :* $(-\sqrt{3}-2)\times(\sqrt{3}-2)-(-1)\times(-1)=(-2)^2-(\sqrt{3})^2-1=4-3-1=0$ *donc ils sont colinéaires !*

Affirmation 2 : Il suffit de vérifier si BE=CE=DE soit avec les coordonnées, soit avec les modules des affixes des vecteurs, ce qui ne pause pas d'autres difficultés que calculatoires (et on peut recourir à la calculatrice en expliquant la méthode et en écrivant le calcul, et le fait qu'on utilise la calculatrice) :

$EC=|c-e|=|1+i\sqrt{3}-(-1+(2+\sqrt{3})i)|=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$ *et*

$EB=|(-\sqrt{3}+i)-(-1+2i+\sqrt{3}i)|=|(-\sqrt{3}+1)+i(-1-\sqrt{3})|=\sqrt{(-\sqrt{3}+1)^2+(-1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=\sqrt{8}$

et $ED=\left|-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i-(-1+2i+\sqrt{3}i)\right|=\left|-2-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{3}{9}+2\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{\frac{13-2\sqrt{3}}{3}}\approx 3{,}08$ *qui n'est pas égal aux deux autres, c'est donc faux, et on a vraiment intérêt à utiliser la calculatrice pour ce type de calcul.*

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

Question qui fait partie de ces questions ouvertes, ou la réponse est loin d'être immédiate, il faut déjà résoudre l'équation, qui a trois solutions : 4 (pour le premier facteur) et 2+2i et 2-2i pour le second (en passant par le discriminant). Ensuite en représentant les sommets du triangle, on s'aperçoit qu'il est isocèle de sommet principal A(4) car $AB=|2+2i-4|=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$ *et*

$AC=|2-2i-4|=|-2-2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$ *donc son aire qui vaut* $\frac{base\times hauteur}{2}$ *vaut* $\frac{BC\times AI}{2}$

où I est le milieu de [BC] car dans un triangle isocèle en A la hauteur issue de A est aussi la médiane.

On calcule $z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=2$ *puis* $CB=|z_B-z_C|=|4i|=4$ *et* $AI=|4-2|=2$ *et donc l'aire du triangle est de* $\frac{4\times 2}{2}=4$ *et non 8 !*

3-

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z - \overline{z} + 2 - 4\mathrm{i} = 0$$

   admet une solution unique.

Affirmation 1 : On calcule l'argument de -1+i qu'on trouve égal à $\alpha = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$ *en passant par* $\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et donc* $arg((-1+i)^{10}) = 10\, arg(-1+i) = \frac{30\pi}{4} = \frac{-2\pi}{4} + 8\pi = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ *en se ramenant à la mesure principale de l'argument, le point est donc sur l'axe des imaginaires pur.*

Affirmation 2 : On résout l'équation en passant par z=x+i y où x et y sont réels et donc $\overline{z} = x - i\,y$ *ce qui donne pour l'équation* $x + iy - (x - iy) + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2iy + 2 - 4i = 0$ *laquelle n'a pas de solutions car on peut bien annuler la partie imaginaire avec y=2 ; mais il restera 2=0, les x ayant disparu et les y étant tous avec des i, on ne peut éliminer le 2 restant.*