AP : Intégrales et primitives: Méthodes classiques.

I-Primitives

1- Calculer une primitive de :

a- $f(x)=3x^2-\dfrac{5}{x^2}$ pour $x>0$ b- $g(x)=3xe^{x^2+1}$

b- En déduire la primitive F de f telle que F(1)=5

II- Intégrales

1- Calculer les intégrales suivantes :

a- $\displaystyle\int_0^1 1-x\,dx$ b- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx$

2- On considère f définie par $f(x)=(6x+1)e^{3x+2}$

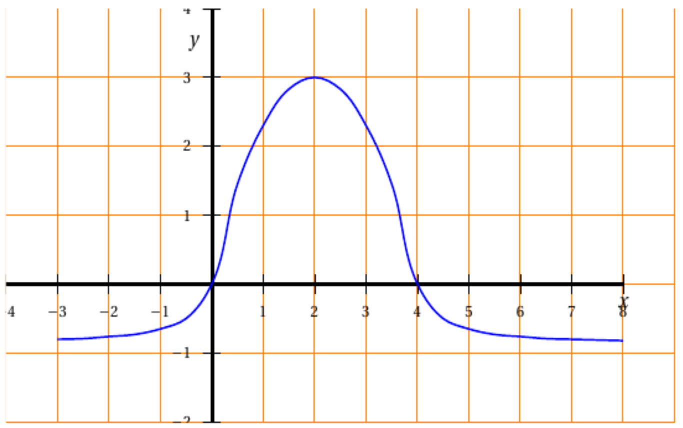
a- Calculer $\displaystyle\int_1^2 e^{3x+2}dx$.

b- Montrer qu'une primitive de $g(x)=6xe^{3x+2}$ est $G(x)=(2x-\dfrac{2}{3})e^{3x+2}$ et en déduire $\displaystyle\int_1^2 6xe^{3x+2}dx$

c-En déduire $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

III- Primitive définie par une intégrale :

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I=[-3\,;\,8]$.



On définit la fonction F sur I, par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1-a- Que vaut $F(0)$?

b- Donner le signe de $F(x)$:

Pour $x \in [0\,;\,4]$ puis pour $x \in [-3\,;\,0]$.

Justifier les réponses.

c- Faire figurer sur le graphique ci-dessus les éléments permettant de justifier les inégalités $6\leqslant F(4)\leqslant 12$.

2-a- Que représente f pour F ?

b- Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f .

IV- Intégrales et suites :

1-Avec n dans l'intégrale :

a-En remarquant que pour tout $x\in[0;1]$ $0\leqslant x^n\leqslant 1$,montrer que la suite définie par $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ est minorée par 0, majorée par e

b- Montrer que la suite est décroissante. Que peut-on en déduire pour sa limite ?

c- En remarquant que pour tout $x\in[0;1]$ $x^n e^x\leqslant x^n e$, montrer que $I_n\leqslant\dfrac{e}{n+1}$ et en déduire la limite.

2- Avec n sur une borne de l'intégrale.

On considère la suite définie par $I_n=\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx$

Montrer que la suite est positive et croissante .