AP : Intégrales et primitives: Méthodes classiques.

I-Primitives

1- Calculer une primitive de :

a- $f(x)=3x^2-\frac{5}{x^2}$ pour $x>0$. *On trouve directement* $F(x)=x^3+\frac{5}{x}$ b- $g(x)=3xe^{x^2+1}$ *ici on peut voir g sous la forme* $u'e^u$ *avec* $u(x)=x^2+1$ *donc* $u'(x)=2x$ *et donc* $g=\frac{3}{2}u'e^u$ *dont une primitive est* $G=\frac{3}{2}e^u$ *soit* $G(x)=1{,}5\,e^{x^2+1}$

b- En déduire la primitive F de *f* telle que F(1)=5

L'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions définies pour x>0 par $F(x)=3x^2-\frac{5}{x^2}+k$ *et F(1)=5 donc* $3-5+k=5\Leftrightarrow k=7$ *donc* $F(x)=3x^2+\frac{5}{x}+7$ *pour tout x>0*

II- Intégrales

1- Calculer les intégrales suivantes :

a- $\int_0^1 3e^{1-x}dx$ *On cherche une primitive de* $3e^{1-x}$ *sous la forme* $u'e^u$ *avec* $u(x)=1-x$ *donc* $u'(x)=-1$ *et donc on a en fait* $-3u'e^u$ *dont une primitive est* $-3e^u$ *ce qui donne*

$\int_0^1 3e^{1-x}dx=[-3e^{1-x}]_0^1=-3e^0-(-3e^1)=$3e-3

b- $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}dx$ *Cette fois-ci on cherche plutôt une primitive d'une fonction de la forme* $\frac{u'}{u^2}$ *avec* $u(x)=x^2+2$ *donc* $u'(x)=2$ *et donc l'expression sous l'intégrale est* $\frac{\frac{1}{2}\times u'}{u^2}$ *dont une primitive est* $\frac{1}{2}\times\frac{-1}{u}$ *ce qui donne* $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2}dx=[\frac{-1}{2(x^2+2)}]_0^2=\frac{-1}{2(2^2+2)}-(\frac{-1}{2(0^2+2)})=\frac{-1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

2- On considère *f* définie par $f(x)=(6x+1)e^{3x+2}$

a- Calculer $\int_1^2 e^{3x+2}dx=[\frac{1}{3}e^{3x+2}]_1^2=\frac{1}{3}e^8-\frac{1}{3}e^5$.

b- Montrer qu'une primitive de $g(x)=6xe^{3x+2}$ est $G(x)=(2x-\frac{2}{3})e^{3x+2}$ et en déduire $\int_1^2 6xe^{3x+2}dx$

On dérive G sous la forme (uv)'=u'v+v'u ce qui donne

$G'(x)=2e^{3x+2}+(2x-\frac{2}{3})\times 3e^{3x+2}=e^{3x+2}\times(2+6x-2)=g(x)$

et donc $\int_1^2 6xe^{3x+2}dx=G(2)-G(1)=\frac{10}{3}e^8-\frac{4}{3}e^5$

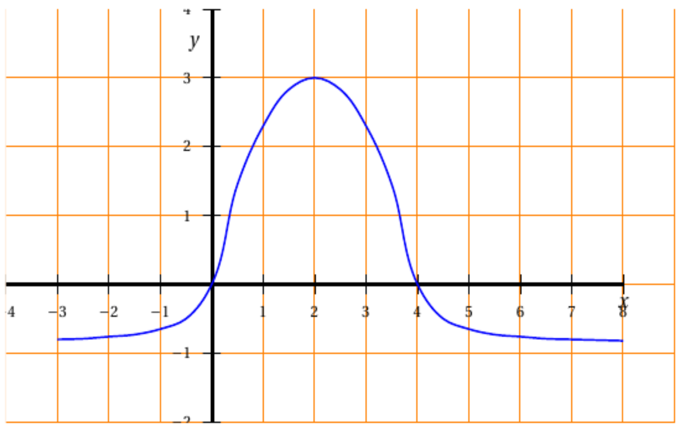
c-En déduire $\int_1^2 f(x)dx$ en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (6x+1)e^{3x+2}dx=\int_1^2 6xe^{3x+2}+e^{3x+2}dx=\int_1^2 g(x)dx+\int_1^2 e^{3x+2}dx$$

$$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=\frac{10}{3}e^8-\frac{4}{3}e^5+\frac{1}{3}e^8-\frac{1}{3}e^5=\frac{11}{3}e^8-\frac{5}{3}e^5$$

III- Primitive définie par une intégrale :

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\,;\,8]$.



On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1-a- Que vaut $F(0)$?
b- Donner le signe de $F(x)$:
Pour $x \in [0\,;\,4]$ puis pour $x \in [-3\,;\,0]$.
Justifier les réponses.
c- Faire figurer sur le graphique ci-dessus les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2-a- Que représente f pour F ?
b- Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f .

1-a- $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ *car* $\int_a^a f(t)\,dt=0$ *pour tout réel a et toute fonction f.*

b-Pour x entre 0 et 4, on intègre avec des bornes dans le bon sens (x>0) une fonction positive (jusqu'à x=4) donc l'intégrale , c.a.d F(x) est positive.

Pour x entre -3 et 0, on intègre une fonction négative donc $\int_x^0 f(t)\,dt$ *est un nombre négatif, mais comme*

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=-\int_x^0 f(t)\,dt$ *(c.a.d l'intégrale d'une fonction négative mais avec des bornes dans le « mauvais sens » car ici x<0 !), F est également positive sur cet intervalle (opposé d'un nombre négatif).*

c- On hachure les carreaux entiers ou les moitiés de carreaux en dessous de la courbe entre 0 et 4, on arrive à 6 carreaux au total, et si on hachure les carreaux sur lesquels la courbe « mord » entre 0 et 4 on arrive à un majorant de l'aire qui est le rectangle de hauteur 3 et de largeur 4 donc 12 carreaux d'aire, et comme la fonction f est positive entre 0 et 4, le nombre F(4) est bien l'aire sous la courbe de f entre 0 et 4 et au-dessus de l'axe des abscisses, cette aire est comprise entre 6 et 12.
2-a f est la dérivée de F.
b- Le signe de f donne les variations de F, on observe donc que F doit décroître sur [-3;0] puis croître sur [0;4] puis décroître à nouveau sur [4;8] .

IV- Intégrales et suites :

1-Avec *n* dans l'intégrale :

a-En remarquant que pour tout $x\in[0;1]$ $0\leqslant x^n\leqslant 1$,montrer que la suite définie par $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ est minorée par 0, majorée par e-1

$0\leqslant x^n\leqslant 1 \Rightarrow 0\leqslant I_n\leqslant \int_0^1 e^x\,dx=[e^x]_0^1=e-1$ *car l'intégration conserve l'ordre.*

b- Montrer que la suite est décroissante. Que peut-on en déduire pour sa limite ?

$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx-\int_0^1 x^n e^x\,dx=\int_0^1 x^{n+1}e^x-x^n e^x\,dx$ *Par linéarité de l'intégrale, ce qui donne ensuite*

$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n(x-1)e^x\,dx$ *or* $e^x>0$ *et* x^n *est positif car* $x\in[0;1]$ *mais x-1<0 pour la même raison donc on intègre une fonction négative (avec les bornes dans le bon sens) donc l'intégrale est négative :*
$I_{n+1}-I_n\leqslant 0$ *et donc la suite est décroissante.*

c- En remarquant que pour tout $x\in[0;1]$ $x^n e^x\leqslant x^n e$, montrer que $I_n\leqslant\dfrac{e}{n+1}$ et en déduire la limite.

Comme $x\in[0;1]$ *comme exp est croissante* $e^x\leqslant e^1=e$ *donc on a bien* $x^n e^x\leqslant x^n e$ *pour tout* $x\in[0;1]$

et ensuite comme l'intégration conserve l'ordre on obtient $I_n \leqslant \int_0^1 x^n e\, dx = [\frac{e}{n+1} x^{n+1}]_0^1 = \frac{e}{n+1} - 0 = \frac{e}{n+1}$ *et on termine avec le th des gendarmes, comme* I_n *est compris entre 0 et* $\frac{e}{n+1}$ *dont la limite est 0, la suite converge vers 0.*

2- Avec *n* sur une borne de l'intégrale.

On considère la suite définie par $I_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$

Montrer que la suite est positive et croissante .

On calcule $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{1}{x} dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ *d'après la relation de Chasles car* $\int_1^n f(t) dt + \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_1^{n+1} f(t) dt$ *et donc on obtient l'intégrale d'une fonction positive (* $\frac{1}{x} > 0$ *si x>0) avec des bornes dans le bon sens (* $n \leqslant n+1$ *) donc un résultat positif (positivité de l'intégrale) :* $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ *et donc la suite est croissante.*