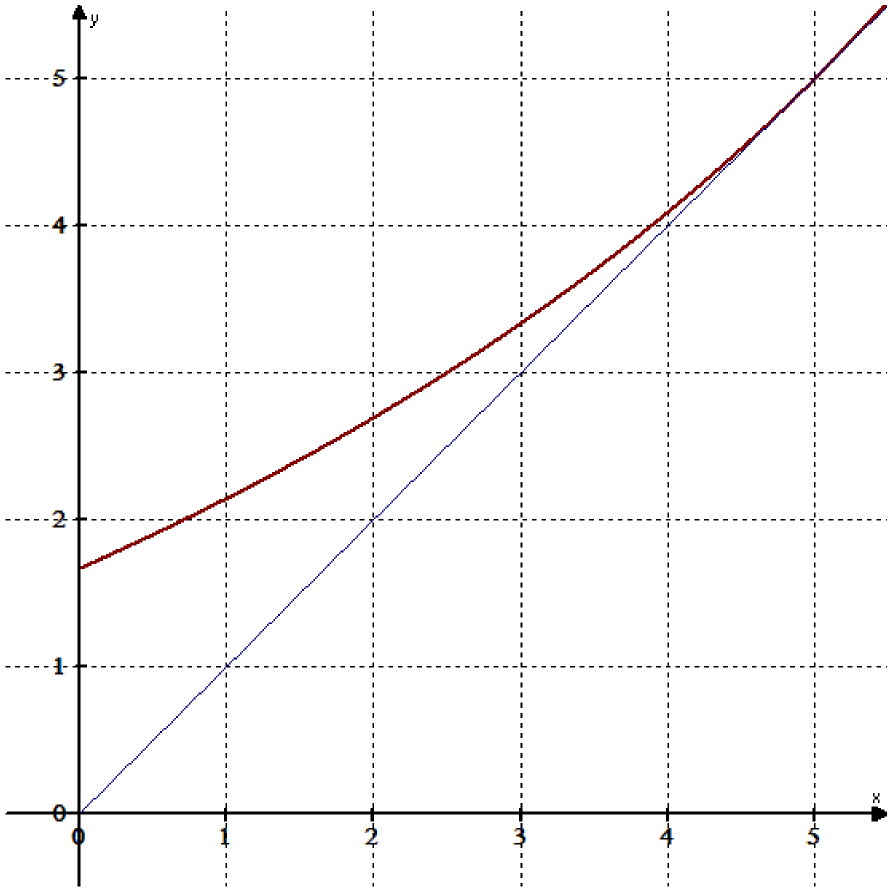
On note (u_n) la suite définie par son terme initial $u_0 = 0$ et la relation, valable, pour tout entier n : $u_{n+1}=\dfrac{5(u_n+5)}{15-u_n}$.



Partie A Conjectures

Représenter graphiquement les huit premiers termes de la suite (u_n).

Que peut-on conjecturer en ce qui concerne le sens de variation de cette suite ?

Semble-t-elle bornée ?
Si oui, donner un minorant et un majorant.

Semble-t-elle converger ?
Si oui, quelle semble-être sa limite ?

Partie B Vérification des deux premières conjectures

1. Vérifier que, pour tout entier n, $\dfrac{5(u_n+5)}{15-u_n}=\dfrac{100}{15-u_n}-5$.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 5$.

b) Établir que, pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-5)^2}{15-u_n}$ *.En déduire que la suite (u_n) est croissante.*

On se propose de montrer que la suite est convergente et de déterminer sa limite au moyen de trois méthodes différentes .

Partie C Première méthode : à l'aide du théorème de convergence monotone

Montrer que (u_n) est convergente et que sa limite L est solution de l'équation $x(15-x)=5(x+5)$.
En déduire la valeur de L.

Partie D Deuxième méthode : à l'aide des théorèmes de comparaison

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $5-\dfrac{10}{n}\leq u_n \leq 5$.

2. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Partie E Troisième méthode : à l'aide d'une formule explicite

1. *On note (v_n) la suite définie, pour tout entier n , par* $v_n=\dfrac{15}{5-u_n}$.

   a) Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1}=\dfrac{3(15-u_n)}{2(5-u_n)}$.

   Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le terme initial.

   b) Donner l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.

2. **Méthode alternative** : calculer les premiers termes de la suite (u_n).
Conjecturer une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.