# Soutien , séance 5 : Complexes

## Faire des calculs dans le corps des complexes

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles utilisées dans $\mathbb{R}$ à un détail près : il existe un nombre dont le carré est égal à -1 !

***Exemples*** : $2(1+2i)+4(3-i)+7i = 2+4i+12-4i+7i = 14+7i$ .

$(3-4i)(1+2i)+(1+i)^2=3+6i-4i-8i^2+1^2+2\times1\times i+i^2=11+2i+1+2i-1=11+4i$ .

## Écrire un quotient sous forme algébrique

Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur .

***Exemple*** : $\dfrac{1+2i}{3+5i}=\dfrac{(1+2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\dfrac{3-5i+6i-10i^2}{3^2-25i^2}=\dfrac{13+i}{34}=\dfrac{1}{34}+\dfrac{1}{34}i$ .

***EXERCICE 1***

1. Simplifier l'écriture des nombres $A=(3+2i)(4-5i)$ et $B=(4+5i)^2$ .
2. Écrire les nombres $A=\dfrac{3}{1+2i}$ , $B=\dfrac{5+2i}{3+i}$ et $C=\dfrac{4+5i}{4+3i}+\dfrac{4}{5i}$ sous forme algébrique
3. Résoudre les équations $(2+i)z-3+5i=0$ , $\dfrac{z+2}{z-3i}=1+i$ .

## Résoudre une équation de degré 2 à coefficient réels dans le corps des complexes

On considère l'équation d'inconnue $z$ :

($E$) $a z^2 + b z + c = 0$ ; où $a$ , $b$ et $c$ sont trois constantes réelles avec $a$ non nul .

On appelle discriminant de $a z^2 + b z + c$ est le nombre (réel) : $\Delta = b^2 - 4ac$ .

| *Signe du discriminant* | *Nombre et nature des solutions* | *Expressions des solutions* |
|---|---|---|
| Si $\Delta < 0$ , | **deux** solutions **complexes conjuguées** $z_1$ et $z_2$ | Les expressions respectives des racines sont : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2\times a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2\times a}$ |
| Si $\Delta = 0$ , | L'équation ($E$) a **une** solution **réelle** unique $x_0$ . | L'expression de $x_0$ est : $x_0=\dfrac{-b}{2\times a}$ . |
| Si $\Delta > 0$ , | L'équation ($E$) a **deux** solutions **réelles** $x_1$ et $x_2$ . | Les expressions respectives des racines sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}$ |

***EXERCICE 2***

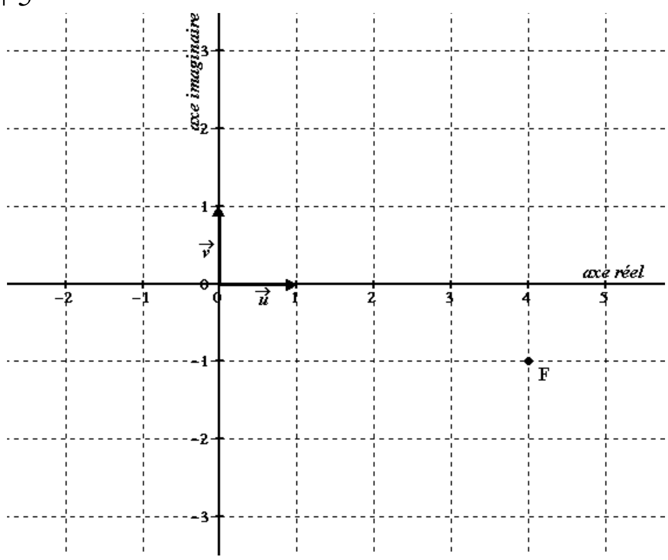
Résoudre les équations $(E_1): z^2+4z+13=0$ ; $(E_2): \dfrac{z-15}{z+5}=2z$ et $(E_3): ((1+i)z-1)(z^2+6z+10)=0$ .

## Représentation géométrique

Construire les points $A$ , $B$ , $C$ , $D$ et $E$ d'affixes respectives :

$z_A = -1 + 3i$ ; $z_B = -1 - 3i$ ; $z_C = 5$ ;
$z_D = 3 + 2i$ et $z_E = -2i$

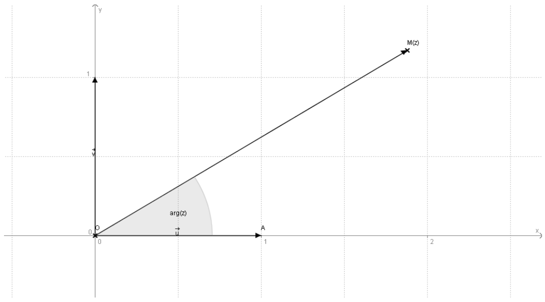
Quelle est l'affixe du point $F$ ?



## Module et argument .

Soit $z$ un nombre complexe non nul .
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ , on note $M$ l'image de $z$ dans le plan complexe .

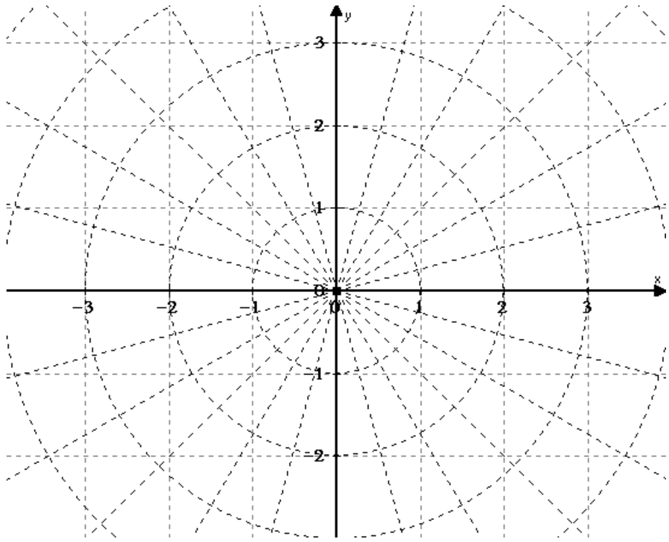
On appelle **argument de *z*** et on note **arg(*z*)** toute mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ .
Si $M$ est le point du plan complexe d'affixe z , alors |z| représente la distance $OM$ .
Si z s'écrit $z = a + ib$ , alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ .
Si $A$ et $B$ sont deux points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ , alors la distance $AB$ est égal à $|z_A - z_B|$ .



***EXERCICE 3***

Construire :

a) $M_1$ dont l'affixe a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{4}$ .
b) $M_2$ dont l'affixe a pour module 3 et pour argument $\frac{-5\pi}{6}$ .
c) l'ensemble des points $M$ dont l'affixe z vérifie |z| = 3 .
d) l'ensemble des points $M$ d'affixe z telle que arg(z) = π/4 [2π].
d)les points $M$ d'affixe z avec arg(z) = 0 ou π [2π].
e) les points $M$ d'affixe z avec arg(z) = p/2 ou -π/2 [2π].
f) l'ensemble des points $M$ d'affixe z avec arg(z) = -2π/3 [2π].



**Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe**

On peut déterminer le module et un argument à l'aide de méthodes géométriques ou par le calcul :
on détermine $r$ , la valeur du module de z (à l'aide de la formule $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ )
en notant , $\theta = \arg(z)$ , on doit avoir $r\cos(\theta) = a$ et $r\sin(\theta) = b$ .
***Exemple*** : Pour trouver le module et un argument de $z=-3+3\sqrt{3}i$ .
Le module de z est $\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+27}=6$ .
En notant , $\theta = \arg(z)$ , on doit donc avoir $6\cos\theta = -3$ et $6\sin\theta = 3\sqrt{3}$ , donc $\cos\theta = -1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ .
La valeur de $\theta$ dans ]-π ; π] qui correspond à ces valeurs est $\theta = 2\pi/3$ .

***EXERCICE 4***

Déterminer le module et un argument des nombres $2-2i$ et $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ .
Déterminer leurs formes exponentielles respectives .

***EXERCICE 5***

*Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;u;v)$ .*
*A , B , C et D sont quatre points d'affixes $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ et $z_D$ respectivement .*

| ***En langage géométrique*** | ***Dans le langage des complexes*** |
|---|---|
| $ABCD$ est un parallélogramme | |
| $C$ appartient à la médiatrice de [$AB$] | |
| | $\lvert z_A - z_B\rvert = 5$ |
| $D$ est le milieu de [$CD$] | |
| | le quotient $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un nombre réel . |
| $C$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon 2 | |
| | $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ |
| $A$ est le symétrique de $C$ par rapport à l'axe réel | |
| | $\lvert z_A - z_B\rvert = \lvert z_B - z_C\rvert = \lvert z_A - z_C\rvert$ |