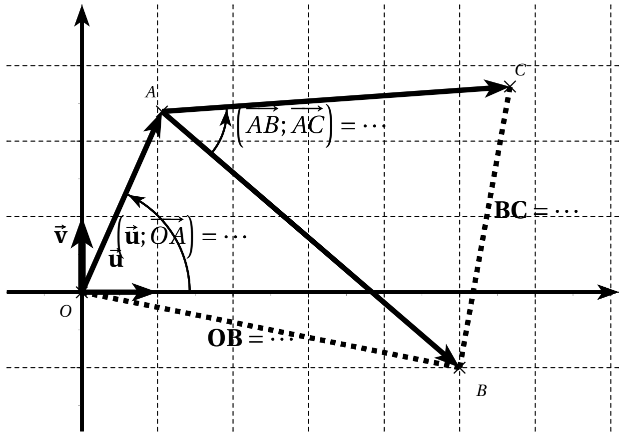
Utilisation des complexes en géométrie

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Compléter la figure ci-contre en utilisant les affixes z_A , z_B , z_C des points A , B et C .



EXERCICE 2

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=1$, $z_{\mathrm{B}}=\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}}=-1$, $z_{\mathrm{D}}=-\mathrm{i}$.

1. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\mathrm{i}|=|z-1|$ est :

   ☐ la médiatrice du segment $[AD]$, ☐ le milieu du segment $[AD]$, ☐ le cercle de centre D et de rayon 1 .

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

   ☐ la droite (CD) privée du point C , ☐ le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C .
   ☐ le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C ,

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ est :

   ☐ la droite (BD), ,
   ☐ la demi-droite $[BD)$ d'origine B passant par D privée de B ☐ le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D .

EXERCICE 3

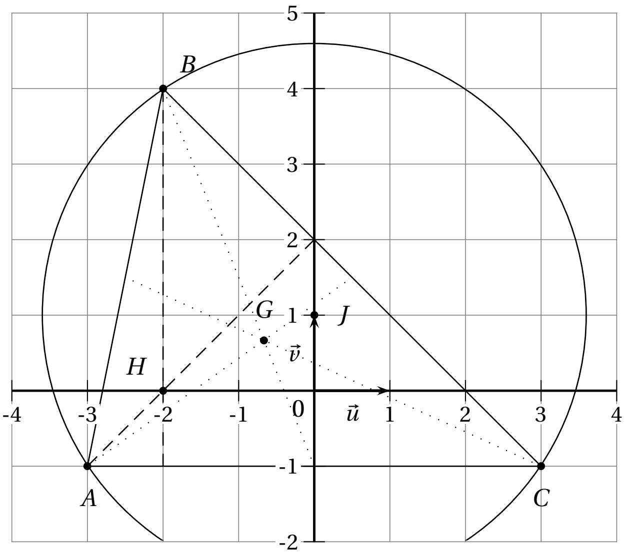
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}}=-2\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{B}}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}\ \text{ et }\ z_{\mathrm{C}}=\sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

1. **a)** Écrire z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.
   b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. **a)** Écrire le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b) En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
On appelle J le point d'affixe i.
On considère les points A, B, C, H et G d'affixes respectives
$a=-3-\mathrm{i}$, $b=-2+4\mathrm{i}$, $c=3-\mathrm{i}$, $h=-2$ et $g=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}$.



1. On admet que $AJ=BJ=\sqrt{13}$.
Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

2. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\frac{b-c}{h-a}$.
En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
Dans la suite de l'exercice, on admet que :
- H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs de ce triangle ;
- G est le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes de ce triangle ;

3. Vérifier que $\frac{h-\mathrm{i}}{g-\mathrm{i}}=3$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=5$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$.

À tout point M d'affixe z, différent de A , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z-5}{z-1}$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $OM'=\frac{BM}{AM}$ et $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}\right)$.

2. **a)** Démontrer que , si M est un point de la droite (Δ) , M' appartient à $(\mathscr{C})$.

b) Démontrer que , si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$, M' appartient à une droite que l'on précisera .

c) Quel est l'ensemble des points M pour lesquels M' appartient à la demi-droite $[OA)$?