Terminales S

CORRIGE DES EXERCICES SUR L'EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

1.a) $3\,e^x - 6 = 1 - 5\,e^x \quad \Leftrightarrow \quad 8\,e^x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{7}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$.

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $3\,e^x - 6 = 1 - 5\,e^x$ est $S = \left\{\ln\left(\frac{7}{8}\right)\right\}$.

1.b) $e^x \times e^{3x+5} = e^{4-3x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x+5} = e^{4-3x} \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 5 = 4 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad 7x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{7}$.

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $e^x \times e^{3x+5} = e^{4-3x}$ est $S = \left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

1.c) $3\,e^x - 4 > 2\,e^x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $3\,e^x - 4 > 2\,e^x - 3$ est $]0\ ;\ +\infty[$.
1.d) $e^{3x+4} \leq (e^{x+1})^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{3x+4} \leq e^{2x+2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4 \leq 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -2$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty\ ;\ -2]$.

1.e) $e^{3x-5} > e^x \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5 > x \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 5 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{2}$.

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{3x-5} > e^x$ est $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

1.f) $e^x - (e^{x+2})^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > e^{2x+4} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^x - (e^{x+2})^2 > 0$ est $]-\infty\ ;\ -4[$.

1.g)
$$\exp\left(\frac{9x-5}{1-x}\right) = (\exp x)^2 \Leftrightarrow \exp\left(\frac{9x-5}{1-x}\right) = \exp(2x) \Leftrightarrow \frac{9x-5}{1-x} = 2x$$
$$\Leftrightarrow 9x - 5 = (1-x)2x \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 5 = 0$$

Le discriminant de $2x^2 + 7x - 5$ est $\Delta = 7^2 - 4\times2\times(-5) = 89$.

Donc , cette dernière équation admet deux solutions $x_1 = \frac{-7-\sqrt{89}}{2\times2} = \frac{-7-\sqrt{89}}{4}$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{89}}{2\times2} = \frac{-7+\sqrt{89}}{4}$

On en conclut que l'ensemble des solutions de $\exp\left(\frac{9x-5}{1-x}\right) = (\exp x)^2$ est $S = \left\{\frac{-7-\sqrt{89}}{4} ; \frac{-7+\sqrt{89}}{4}\right\}$.

2.a) Pour tout x , $f'(x) = 4\,e^x + 5\times2x - 3 = 4\,e^x + 10x - 3$.

2.b) La fonction f se présente sous la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; où u et v sont définies par $u(x) = 2\,e^x + 3$ et $v(x) = x + 2$ respectivement .

Donc , pour tout x : $f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$. Comme $u'(x) = 2\,e^x$ et $v'(x) = 1$, on en déduit que :

$$f'(x) = \frac{2\,e^x\times(x+2) - 1\times(2\,e^x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x\,e^x + 4\,e^x - 2\,e^x - 3}{(x+2)^2} = \frac{2x\,e^x + 2\,e^x - 3}{(x+2)^2}$$.

2.c) La fonction f se présente sous la forme $f(x) = e^{u(x)}$; où u est définie par $u(x) = x^2 - 5x + 1$.
On sait que : $f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$. Comme $u'(x) = 2x - 5$, on obtient : $f'(x) = (2x - 5)\,e^{x^2 - 5x + 1}$.

EXERCICE 2

1.a) Comme la fonction exponentielle est croissante, on sait que , si $x < 0$, alors :

$e^{2x} < e^0 = 1$, donc $e^{2x} - 4 < -3 \Rightarrow e^{2x} - 4 < 0$.

De plus $e^x > 0$ et $x - 1 > 0$ pour tout $x < 0$, on en déduit que $4\,e^x\,(x - 1) < 0$.
Comme $f(x) = e^{2x} + 4x\,e^x - 4e^x - 4 = e^{2x} - 4 + 4x\,e^x - 4e^x = e^{2x} - 4 + 4e^x(x - 1)$, on en conclut que $f(x) < 0$, pour tout $x < 0$.
1.b) Comme $f(x) < 0$, pour tout $x < 0$, l'équation (E) n'a pas de solution dans $]-\infty\ ;\ 0[$.
2.a) La fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = e^{u(x)} + v(x)\times w(x) - 4e^x - 4$, où u , v et w sont définies par $u(x) = 2x$, $v(x) = 4x$ et $w(x) = e^x$.
On en déduit que $f'(x) = u'(x)\times e^{u(x)} + v'(x)\times w(x) + w'(x)\times v(x) - 4e^x = 2e^{2x} + 4e^x + e^x\times4x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x$.
En factorisant par $2e^x$, on obtient $f'(x) = 2e^x\,(e^x + 2x)$.
Comme $e^x > 0$, pour tout x , on en déduit que , si $x \geq 0$, alors $2e^x > 0$ et $e^x + 2x > 0$, donc $f'(x) > 0$.
On en conclut que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2.b) Pour tout x, $f(x)$ s'écrit $f(x) = e^x\,(e^x + 4x - 4) - 4$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} (e^x + 4x - 4) = +\infty$, on en conclut que $\lim_{x\to+\infty} (e^x(e^x + 4x - 4)) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = +\infty$
Comme f est continue (car dérivable) sur $[0\ ;\ +\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle et que 0 appartient à l'intervalle d'extrémités $f(0) = -7$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = +\infty$, on en conclut , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Grâce à la calculatrice, on obtient : $0{,}84 < \alpha < 0{,}85$.

EXERCICE 3

1. On sait que $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$, on en conclut que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et, par suite, que la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. On sait que $\lim_{\to+\infty} g(x)=\lim_{\to+\infty}(x^3)=+\infty$

Pour tout x , $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Comme le discriminant de $3x^2 + 2x + 1$ est $\Delta = 2^2 - 4\times3\times1 = -8 < 0$, l'expression $g'(x)$ garde un signe constant : celui du coefficient du terme de degré 2 .

On en déduit que $g'(x) > 0$, pour tout x et donc que g est strictement croissante .

Comme g est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que 0 appartient à l'intervalle d'extrémités $g(0) = -1$ et $\lim_{\to+\infty} g(x)=+\infty$, on en conclut , grâce au théorème des valeurs intermédiaires , que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

3.a) La fonction f s'écrit sous la forme $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x\,e^{-x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Comme la fonction u s'écrit sous la forme $u(x) = w(x)\times y(x)$ avec $w(x) = x$ et $y(x) = e^{-x}$, on sait que $u'(x) = w'(x)\times y(x) + y'(x)\times w(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

D'où : $f'(x)=\frac{e^{-x}(1-x)\times(x^2+1)-2x\times x e^{-x}}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{-x}((1-x)(x^2+1)-2x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{-x}(x^2+1-x^3-x-2x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-e^{-x}g(x)}{(x^2+1)^2}$

Comme $e^{-x} > 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$, o n en déduit que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe .

3.b) Comme g est strictement croissante et que $g(\alpha) = 0$, on en déduit que :

- si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(a) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.
- si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(a) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

EXERCICE 4

1. La fonction f_2 s'écrit sous la forme $f_2(x) = u(x)\times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x)=e^{-\frac{2}{3}x}$.

On en déduit que $f_2'(x) = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x)$.

Comme $u'(x) = 1$ et $v(x)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}$, on obtient : $f_2'(x)=1\times e^{-\frac{2}{3}x}+x\times\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}\right)=\left(1-\frac{2}{3}x\right)e^{-\frac{2}{3}x}$.

Comme $e^{-\frac{2}{3}x}>0$, pour tout réel x , le signe de f2'(x) est donc le même que celui de $1-\frac{2}{3}x$.

On en déduit que $f_2'(x) > 0$ lorsque $0\le x<\frac{3}{2}$ et $f_2'(x) < 0$ lorsque $x>\frac{3}{2}$.

On en conclut que f_2 admet un maximum lorsque $x=\frac{3}{2}$.

La courbe représentative de f_2 est donc la courbe tracée en bleu .

2.a) L'équation $f_1(x)=f_2(x)$ est équivalente à $4x e^{-x}=x e^{\frac{-2x}{3}}$.

Comme $e^{\ln 4 - x} = e^{\ln 4} \times e^{-x} = 4\,e^{-x}$, cette dernière équation équivaut encore à $x e^{\ln 4-x}=x e^{\frac{-2x}{3}}$.

On en déduit que $f_1(x)=x e^{\frac{-2x}{3}} \Leftrightarrow x e^{ln4-x}-x e^{\frac{-2x}{3}}=0 \Leftrightarrow x(e^{ln4-x}-e^{\frac{-2x}{3}})=0$.

Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , cette dernière équation équivaut à :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\ln 4-x}-e^{-\frac{2}{3}x}=0 .$$

Comme $e^{\ln 4-x}-e^{-\frac{2}{3}x}=0 \Leftrightarrow e^{\ln 4-x}=e^{-\frac{2}{3}x} \Leftrightarrow \ln 4-x=-\frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\ln 4 \Leftrightarrow x = 3\ln 4$, on en conclut que les solutions de l'équation $f_1(x)=f_2(x)$ sont 0 et 3 ln4 .

2.b) ● Les solutions de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de C_1 et C_2 .

● Cela correspond au nombre d'heures pour lequel le taux d'alcoolémie est le même selon que l'alcool a été absorbé à jeun ou après ingestion d'aliments .