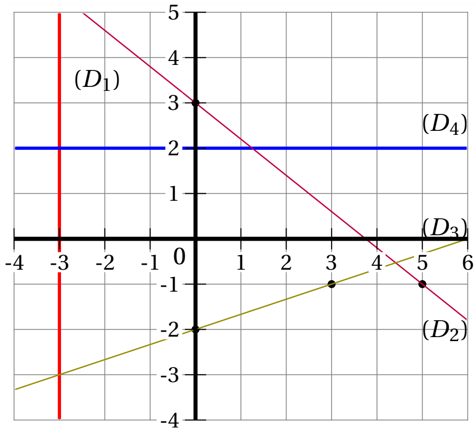
Droites, systèmes linéaires

EXERCICE 1



- Comme (D_1) a pour équation $x = -3$, on en déduit que (D_1) est la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(-3\,;\,0)$.
- Pour tracer la droite (D_2) , on utilise un tableau de valeurs afin d'obtenir deux points de cette droite :

Valeurs de x	0	5
Valeurs de y	3	-1

  .
  (D_2) passe par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,3)$ et $(5\,;\,-1)$.
- On procède comme pour (D_2) :

Valeurs de x	0	3
Valeurs de y	-2	-1

  (D_3) passe par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,-2)$ et $(3\,;\,-1)$.
- Comme (D_1) a pour équation $y = 2$, elle est la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.

EXERCICE 2

1. **Figure complète** : voir à la fin de l'exercice .
2. **a)** Comme $-0,5\times x_A + 2,5 = -0,5\times 3 + 2,5 = -1,5+2,5 = 1 = y_A$,on en conclut que le point A appartient à (Δ) .

   b) Déterminer le point D de (Δ) d'ordonnée 2 revient à déterminer la valeur de x_D telle que $-0,5\times x_D + 2,5 = 2$.
   Or, $-0,5\times x_D + 2,5 = 2 \Leftrightarrow -0,5x_D = -0,5 \Leftrightarrow x_D = \dfrac{-0,5}{-0,5} = 1.$
   On en conclut que le point D a pour coordonnées $(1\,;\,2)$.

   c) Pour montrer que (Δ) est parallèle à (BC), il suffit de vérifier que ces deux droites ont le même coefficient directeur.
   - Le coefficient directeur de (Δ) est $m_1 = -0,5$.
   - Le coefficient directeur de (BC) est $m_2 = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{4-2}{3-7} = \dfrac{2}{-4} = -0,5$.

   Comme $m_1 = m_2$, les droites (Δ) et (BC) sont parallèles .
3. **a)** L, le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}\,;\,\dfrac{y_B+y_D}{2}\right) = \left(\dfrac{7+1}{2}\,;\,\dfrac{2+2}{2}\right) = (4\,;\,2)$.

   b) Comme les droites $(\Delta) = (AD)$ et (BC) sont parallèles et que ses diagonales n'ont pas le même milieu, le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
   Comme les côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ ne peuvent pas être parallèles, les droites (CD) et (AB) sont sécantes .
4. - Comme $x_A = x_C = 3$, la droite (AC) a pour équation $x = 3$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).
   - Comme $y_B = y_D = 2$, la droite (BD) a pour équation $y = 2$ (droite parallèle à l'axe des abscisses).

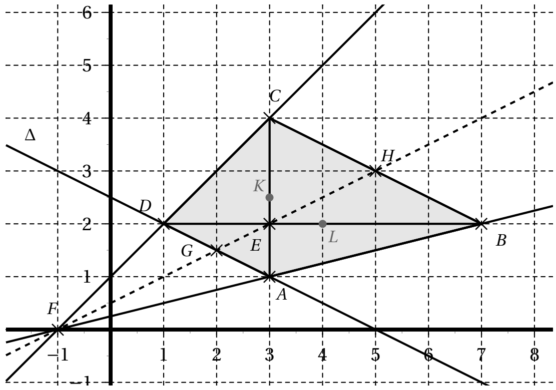
   E, point d'intersection de (AC) et (BD) a ses coordonnées qui vérifient chacune de ces deux équations, donc $x_E = 3$ et $y_E = 2$.
   Donc, le point E a pour coordonnées $(3\,;\,2)$.
5. **a)** Comme $x_A \neq x_B$, la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées .
   Son coefficient directeur est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-1}{7-3} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.
   On en déduit qu'elle a une équation réduite de la forme $y = 0,25x + p$.
   Comme A appartient à cette droite, on a $0,25\times x_A + p = y_A \Leftrightarrow 0,25\times 3 + p = 1 \Leftrightarrow 0,75 + p = 1 \Leftrightarrow p = 1 - 0,75 = 0,25$.
   On en conclut que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = 0,25x + 0,25$.

   b)
   - Comme $x_F + 1 = -1+1 = 0 = y_F$, le point F appartient à (CD) ;
   - Comme $0,25\times x_F + 0,25 = 0,25\times(-1) + 0,25 = -0,25 + 0,25 = 0 = y_F$, il appartient également à (AB) .

   On en conclut que $F(-1\,;\,0)$ est le point d'intersection des droites (CD) et (AB).
6. Pour montrer que F , E et les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$ sont alignés, il suffit de vérifier que G et H, les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$ appartiennent à la droite (EF) .

   - Comme $x_E \neq x_F$, la droite (EF) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées .
     Son coefficient directeur est $m' = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{0-2}{-1-3} = \dfrac{-2}{-4} = 0,5$.
     On en déduit qu'elle a une équation réduite de la forme $y = 0,5x + p$.
     Comme E appartient à cette droite, on a $0,5\times x_E + p = y_E \Leftrightarrow 0,5\times 3 + p = 2 \Leftrightarrow 1,5 + p = 2 \Leftrightarrow p = 2 - 1,5 = 0,5$.
     On en conclut que l'équation réduite de la droite (EF) est $y = 0,5x + 0,5$.

- G, le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_D}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_D}{2}\right)=\left(\dfrac{3+1}{2}\ ;\ \dfrac{1+2}{2}\right)=(2\ ;\ 1,5)$.
  Comme $0,5\times x_G+0,5=0,5\times 2+0,5=1+0,5=1,5=y_G$, le point G appartient à la droite (EF) .
- H, le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\dfrac{7+3}{2}\ ;\ \dfrac{2+4}{2}\right)=(5\ ;\ 3)$.
  Comme $0,5\times x_H+0,5=0,5\times 5+0,5=2,5+0,5=3=y_H$, le point H appartient à la droite (EF) .



EXERCICE 3

1. • On emploie une combinaison linéaire des deux lignes du système $[L_1]+5\times[L_2]$:

$$\begin{array}{rr} [L_1] & 0,8x+4,5y=4,7 \\ 5\times[L_2] & 1,5x-4,5y=1,05 \\ [L_1]+5\times[L_2] & 2,3x=5,75 \end{array}$$

On en déduit que $x=\dfrac{1,05}{2,3}=2,5$.

- En utilisant cette valeur de x dans $[L_2]$, on obtient $0,3\times 2,5-0,9y=0,21 \Leftrightarrow -0,9y=-0,54 \Leftrightarrow y=\dfrac{-0,54}{-0,9}=0,6$.

On en conclut le système (S_1) admet pour couple-solution $(1,5\ ;\ 0,6)$.

a) Grâce à la ligne $[L_2]$ du système , on obtient $y=7-3x$.

- En reportant cette expression la ligne $[L_1]$, on obtient $2x-5(7-3x)=-1 \Leftrightarrow 2x-35+15x=-1 \Leftrightarrow 17x=34 \Leftrightarrow x=\dfrac{34}{17}=2$.
- Enfin , en utilisant l'expression donnant y en fonction de x , on en déduit que $y=7-3\times 2=1$.

On en conclut le système (S_2) admet pour couple-solution $(2\ ;\ 1)$.

2. **a)** À l'aide de la première ligne du système , on obtient $z=4-3x-y$.

b) Si $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution de (S) , alors
- $-7x+3y-2z=6 \Leftrightarrow -7x+3y-2(4-3x-y)=6 \Leftrightarrow -7x+3y-8+6x+2y=6 \Leftrightarrow -x+5y=14$;
- $5x-2y-3z=5 \Leftrightarrow 5x-2y-3(4-3x-y)=5 \Leftrightarrow 5x-2y-12+9x+3y=5 \Leftrightarrow 14x+y=17$

On en conclut que , si $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution de (S) , alors $(x\ ;\ y)$ est solution de (S_3') $\left\{\begin{array}{ll} -x+5y=14 & [L_1] \\ 14x+y=17 & [L_2] \end{array}\right.$

c) Résolution de (S_3')
- Grâce à la ligne $[L_1]$ du système , on obtient $x=5y-14$.
- En reportant cette expression la ligne $[L_2]$, on obtient

$$14(5y-14)+y=17 \Leftrightarrow 70y-196+yx=17 \Leftrightarrow 71y=217 \Leftrightarrow x=\frac{217}{7}=3.$$

- Enfin , en utilisant l'expression donnant x en fonction de y , on en déduit que $x=5\times 3-14=1$.
- On en conclut le système (S_3') admet pour couple-solution $(1\ ;\ 3)$.
- On en déduit que $z=4-3\times 1-3=-2$.

On en conclut que (S_3) admet pour triplet-solution $(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.