EXERCICE 1

1. $A=(3+2i)(4-5i)=12-15i+8i-10i^2=12-15i+8i+10=22-7i$

$B=4^2+2\times4\times5i+(5i)^2=16+40i-25=-9+40i$.

2. $A=\frac{3(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i}{1+4}=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$, $B=\frac{5+2i}{3+i}=\frac{(5+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{15-5i+6i-2i^2}{9+1}=\frac{17-i}{10}=1{,}7-0{,}1\,i$

$C=\frac{(4+5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}+\frac{4\times(-i)}{5i\times(-i)}=\frac{16-12i+20i-15i^2}{16+9}-\frac{4\times i}{5}=\frac{31+8i}{25}-\frac{20i}{25}=\frac{31-12i}{25}=\frac{31}{25}-\frac{12}{25}i$

3. $(2+i)z-3+5i=0\Leftrightarrow(2+i)z=3-5i\Leftrightarrow z=\frac{3-5i}{2+i}=\frac{(3-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-3i-10i+5i^2}{4+1}=\frac{1-13i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{13}{5}i$

$\frac{z+2}{z-3i}=1+i\Leftrightarrow z+2=(1+i)(z-3i)\Leftrightarrow z+2=z-3i+iz+3\Leftrightarrow-1+3i=iz\Leftrightarrow z=\frac{-1+3i}{i}=\frac{(-1+3i)(-i)}{i\times(-i)}=3+i$

EXERCICE 2

Résolution de $(E_1)\colon z^2+4z+13=0$

Le discriminant de $z^2+4z+13$ est $\Delta=4^2-4\times1\times13=-36$.

Comme ce discriminant est négatif , l'équation (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1=\frac{-4-\sqrt{36}\,i}{2\times1}=-2-3i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-4+\sqrt{36}\,i}{2\times1}=-2+3i$$

Résolution de $(E_2)\colon\frac{z-15}{z+5}=2z$

$\frac{z-15}{z+5}=2z\Leftrightarrow z-15=2z(z+5)\Leftrightarrow z-15=2z^2+10z\Leftrightarrow 2z^2+9z+15=0$

Le discriminant de $2z^2+9z+15$ est $\Delta=9^2-4\times2\times15=-39$

Comme ce discriminant est négatif , l'équation (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1=\frac{-9-\sqrt{39}\,i}{2\times2}=\frac{-9-\sqrt{39}\,i}{4} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-9+\sqrt{39}\,i}{2\times2}=\frac{-9+\sqrt{39}\,i}{4}$$

Résolution de $(E_3)\colon((1+i)z-1)(z^2+6z+10)=0$.

Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , on en déduit que (E_3) équivaut à :

$$(1+i)z-1=0 \quad \text{ou} \quad z^2+6z+10=0$$

Or , $(1+i)z-1=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

De plus , comme le discriminant de $z^2+6z+10$ est $\Delta=6^2-4\times1\times10=-4$, l'équation $z^2+6z+10=0$ admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1=\frac{-6-\sqrt{4}\,i}{2\times1}=-3-i \quad \text{et} \quad z_1=\frac{-6+\sqrt{4}\,i}{2\times1}=-3+i \; .$$

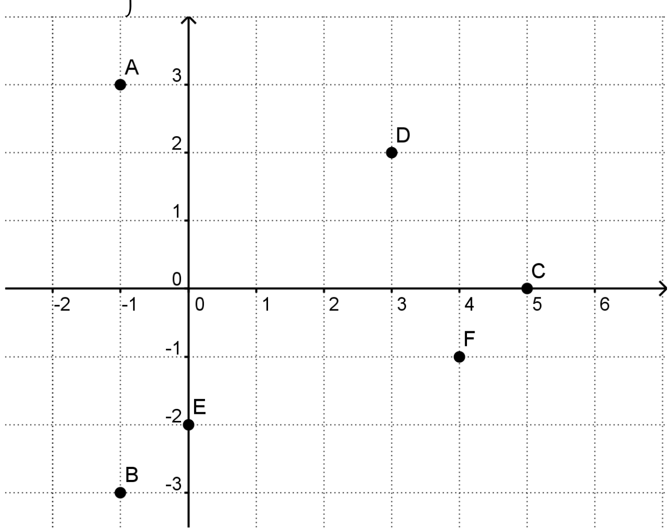
Donc , l'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\,;-3-i\,;-3+i\right\}$.

Représentation géométrique

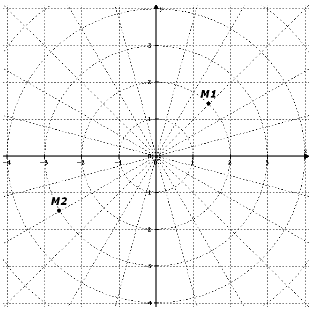
$z_A = -1 + 3i$; $z_B = -1 - 3i$; $z_C = 5$;

$z_D = 3 + 2i$ et $z_E = -2i$

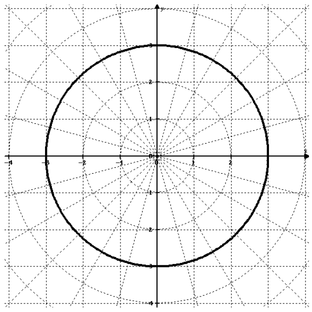
F a pour affixe $4 - i$



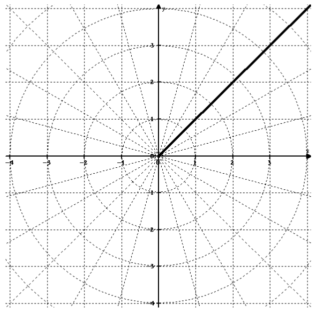
EXERCICE 3



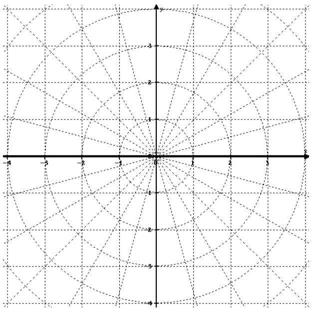
a) M_1 et **b)** M_2



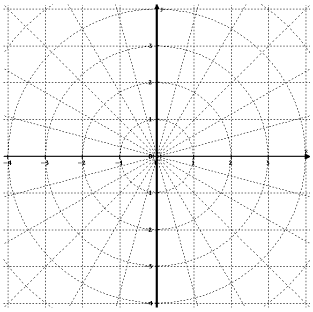
c) ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z| = 3$: **cercle de centre O et de rayon 3**



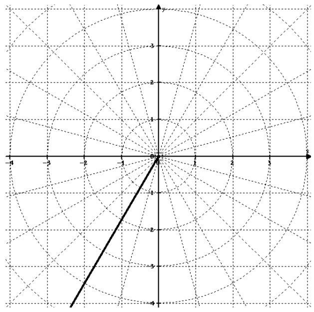
d) ensemble des points M d'affixe z telle que arg(z) = π/4 [2π]: **partie de la demi-droite d'équation $y = x$ située dans le quart de plan supérieur**



e) ensemble des points M d'affixe z avec arg(z) = 0 ou π [2π] : **axe réel**



f) les points M d'affixe z avec arg(z) = π/2 ou -π/2 [2π] : **axe imaginaire**



g) l'ensemble des points M d'affixe z avec arg(z) = -2π/3 [2π]: **demi-droite ...représentée ci-dessus**

EXERCICE 4

• Le module de 2 – 2 i est $\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

En notant , $\theta = \arg(z)$, on doit donc avoir $2\sqrt{2}\cos\theta=2$ et $2\sqrt{2}\sin\theta=-2$, donc :

$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

La valeur de θ dans]-π ; π] qui correspond à ces valeurs est $\theta = -\pi/4$.

La forme exponentielle de 2 – 2 i est donc $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

• Le module de $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ est $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

En notant , $\theta = \arg(z)$, on doit donc avoir $2\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{6}$ et $2\sqrt{2}\sin\theta=-\sqrt{2}$, donc :

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}$.

La valeur de θ dans]-π ; π] qui correspond à ces valeurs est $\theta = -\pi/6$.

La forme exponentielle de $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ est donc $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 5

En langage géométrique	*Dans le langage des complexes*
ABCD est un parallélogramme ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$)	$z_B - z_A = z_C - z_D$
C appartient à la médiatrice de [*AB*] **(*AC* = *BC*)**	$\vert z_C - z_A\vert = \vert z_C - z_B\vert$
***AB* = 5**	$\vert z_A - z_B\vert = 5$
D est le milieu de [*CD*]	$z_D=\frac{z_C+z_D}{2}$
Les points *A* , *B* et *C* sont alignés	le quotient $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un nombre réel .
C appartient au cercle de centre *A* et de rayon 2	$\vert z_C - z_A\vert = 2$
ABCD est un parallélogramme **(les diagonales ont le même milieu)**	$\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
A est le symétrique de *C* par rapport à l'axe réel	$z_A=\bar{z}_C$
Le triangle *ABC* est équilatéral (*AB* = *AC* = *BC*)	$\vert z_A - z_B\vert = \vert z_B - z_C\vert = \vert z_A - z_C\vert$