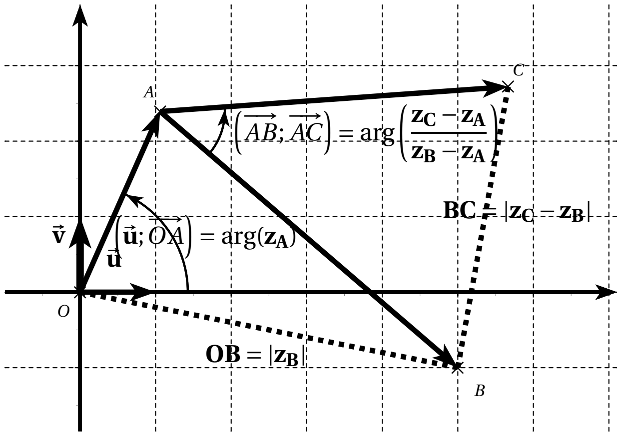
Utilisation des complexes en géométrie

EXERCICE 1



EXERCICE 2

1. Dire qu'un point M a son affixe z telle que $|z+\mathrm{i}| = |z-1|$ équivaut à dire qu'il vérifie $|z_M - z_D| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow DM = AM$.
L'ensemble de ces points est donc la médiatrice de $[AD]$ (réponse **a)**)= .

☒ la médiatrice du segment $[AD]$, ☐ le milieu du segment $[AD]$, ☐ le cercle de centre O et de rayon 1 .

2. Dire qu'un point M a son affixe z telle que $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur équivaut à dire qu'il vérifie $\arg\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi] \Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, ce qui revient encore à dire que le triangle CDM est rectangle en M, c'est-à-dire que M appartient au cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C (réponse **b)**)= .

☐ la droite (CD) privée du point C , ☐ le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C .
☒ le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C ,

3. Dire qu'un point M a son affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ revient à dire que $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
L'ensemble cherché est donc la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B (réponse **b)**)= .

☐ la droite (BD), ,
☒ la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B ☐ le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D .

EXERCICE 3

1. **a)**
- $z_A = -2\mathrm{i}$ a pour module $r = 2$ et pour argument $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, donc sa forme exponentielle est $z_A = 2 \times \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$.
- Le module de z_B est $|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
  Si l'on note θ un argument de z_B, on doit donc avoir :

  · $2\cos\theta = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ · $2\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2}$.

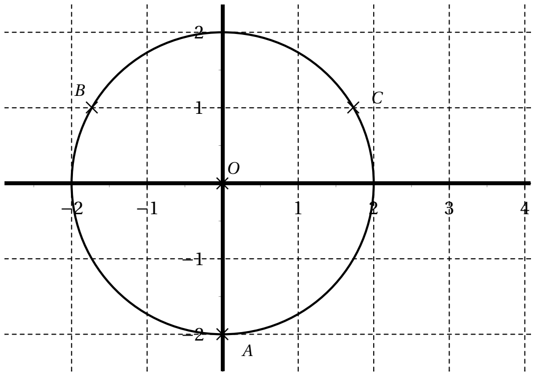
  On en déduit que $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ et, par suite, que la forme exponentielle de z_B est $z_B = 2 \times \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.
- Le module de z_C est $|z_C| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
  Si l'on note θ un argument de z_C, on doit donc avoir :

  · $2\cos\theta = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ · $2\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et, par suite, que la forme exponentielle de z_C est $z_C = 2 \times \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$.

b) Comme $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$, on en déduit que $OA = OB = OC = 2$ et, par suite, que A , B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

c) Figure complète :



2. **a)** $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + \mathrm{i} - (-2\mathrm{i})}{\sqrt{3} + \mathrm{i} - (-2\mathrm{i})} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3\mathrm{i}}{\sqrt{3} + 3\mathrm{i}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$, on obtient :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-\sqrt{3} + 3\mathrm{i})(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})}{(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\mathrm{i} - 9\mathrm{i}^2}{3 + 9} = \frac{-3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\mathrm{i} + 9}{12} = \frac{6 + 6\mathrm{i}\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le module de $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left|\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$.

Si l'on note θ un argument de $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on doit donc avoir :

- $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et, par suite, que la forme exponentielle de $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = s\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.

b)
- Comme $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$, on en déduit que $\dfrac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$, ce qui revient à dire que le triangle ABC est isocèle en A .
- Comme $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{pi}{3}$ $[2\pi]$, on en déduit que $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{pi}{3}$ $[2\pi]$, on en conclut que ABC est équilatéral.

EXERCICE 4

1. Pour montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC , il suffit de vérifier qu'il est à égale distance des sommets de ce triangle .
Comme $CJ = |c - \mathrm{i}| = |3 - \mathrm{i} - \mathrm{i}| = |3 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, on en conclut que $CJ = AJ = BJ = \sqrt{13}$ et , par suite , que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

2. $\dfrac{b - c}{h - a} = \dfrac{-2 + 4\mathrm{i} - 3 + \mathrm{i}}{-2 + 3 + \mathrm{i}} = \dfrac{-5 + 5\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{(-5 + 5\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{-5 + 5\mathrm{i} + 5\mathrm{i} + 5}{1^2 + 1^2} = \dfrac{10\mathrm{i}}{2} = 5\mathrm{i}.$
Comme $\arg\left(\dfrac{b - c}{h - a}\right) = \arg(5\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AH}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, on en conclut que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

3. $\dfrac{h - \mathrm{i}}{g - \mathrm{i}} = \dfrac{-2 - \mathrm{i}}{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i} - \mathrm{i}} = \dfrac{-2 - \mathrm{i}}{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{\frac{1}{3}(2 + \mathrm{i})} = 3$.
Comme $\arg\left(\dfrac{h - \mathrm{i}}{g - \mathrm{i}}\right) = \arg(3) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JG}\,;\,\overrightarrow{JH}\right) = 0$ $[2\pi]$, on en conclut que les points J , G et H sont alignés .

EXERCICE 5

1. Par définition , l'affixe du point I' image de I est $z_{I'} = \dfrac{z_I - 5}{z_I - 1} = \dfrac{3 + \mathrm{i} - 5}{3 + \mathrm{i} - 1} = \dfrac{-2 + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \dfrac{(-2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \dfrac{-4 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 1}{2^2 + 1^2} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

2. Pour tout point M distinct de A et B, on a :

- $OM' = |z'| = \left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| = \dfrac{|z-5|}{|z-1|}$.
  Comme $|z-5| = |z_M - z_B| = BM$ et $|z-1| = |z_M - z_A| = AM$, on en déduit que $OM' = \dfrac{BM}{AM}$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-5}{z-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right)$.
  Comme $\arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$, on en conclut que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

3. **a)** Si M est un point de la droite (Δ) , alors $BM = AM \Rightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow OM' = 1$, ce qui signifie que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

b) Si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$, alors $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, ce qui signifie que M' appartient à l'axe des ordonnées du repère .

c) Dire que M' appartient à la demi-droite $[OA)$ revient à dire que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0$ $[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0$ $[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = 0$ $[2\pi]$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ont même direction et même sens .
On en conclut que l'ensemble cherché est la demi-droite $[AB)$.