Correction du devoir commun de Mathématiques

Compétences élémentaires

1. **a)** L'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f est l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de f .
On en conclut que $\mathscr{D}_f = [-4\ ;\ 3]$.

b) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses .
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S} = \{-3\ ;\ 1\}$.

2. **a)** Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\mathscr{S}_1 = \{-4\ ;\ 0\}$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points de $\mathscr{C}_1$ situés au-dessus de $\mathscr{C}_2$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $\mathscr{S}_2 =]-4\ ;\ 0[$.

3. Pour la première fonction , le tableau de variation est le suivant :

x	-4		-1		2		4
f	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$2{,}5$

Pour la seconde fonction , on obtient le tableau de variation ci-contre :

x	-4		-3		-1		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	

4. **a)**
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de l'axe des abscisses .
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de l'axe des abscisses .

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		$0{,}9$		$3{,}5$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) D'après le tableau de signe , l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -4[\cup]0{,}9\ ;\ 3{,}5[$.

5. **a)** $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$. Le signe de $f(x) = -2x+5$ est donné par le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

b) D'après le tableau de signe , l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{2}\ ;\ 3{,}5\right[$.

6. **a)**
- $3x - 120 = 0 \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = \dfrac{120}{3} = 40$.
- $-5x+15 = 0 \Leftrightarrow -5x = -15 \Leftrightarrow x = \dfrac{-15}{-5} = 3$.

b) D'après le tableau de signes , on en conclut que l'ensemble des solutions de $(3x-120)(-5x+15) \leqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ 3] \cup [40\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		3		40		$+\infty$
Signe de $3x-120$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-5x+15$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7. **a)**
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $20-4x=0 \Leftrightarrow -4x=-20 \Leftrightarrow x=\dfrac{-20}{-4}=5$.

b) En utilisant ce tableau de signes , on en conclut que l'ensemble des solutions de $\dfrac{x-1}{20-4x} \geqslant 0$ est $[1 ; 5[$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $20-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

8. **a)** Comme -0,8 et 0,2 sont deux nombres de l'intervalle $[-2 ; 1]$, que -0,8 < 0,2 et que f est décroissante sur $[-2 ; 1]$, on en déduit que $f(-0,8) > f(0,2)$.

b) Comme 1,35 et 2,6 sont deux nombres de l'intervalle $[1 ; 3]$, que 1,35 < 2,6 et que f est croissante sur $[1 ; 3]$, on en déduit que $f(1,35) < f(2,6)$.

9. D'après le tableau de variation de f , on peut affirmer que :

a) « Le maximum de f est 6 et il est atteint en $x=8$ »

b) « Le minimum de f est -10 et il est atteint en $x=7$ »

c) L'image de 7 par f est -10 .

d) Un antécédent de -1 par f est 0 .
Ce n'est pas le seul antécédent possible .
En effet , comme f est décroissante sur $[6 ; 7]$ et que , sur cet intervalle , le minimum est égal à -10 et que le maximum est égal à 5 , -1 peut avoir un autre antécédent dans cet intervalle .

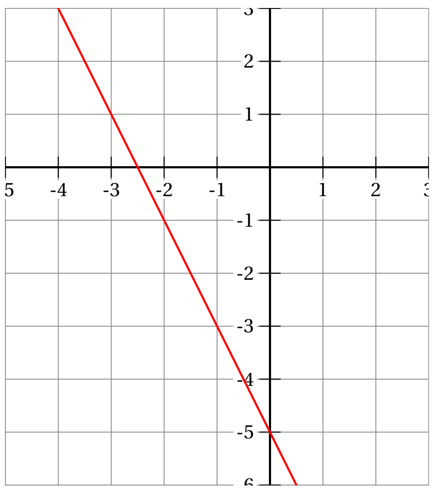
10. **a)** Pour tout réel x , $i(x)=(x-2)^2-x^2+3x-1=x^2-2\times x\times 2+2^2-x^2+3x-1=x^2-4x+4-x^2+3x-1=-x+3$.

b) Une fonction affine est une fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x)=ax+b$; où a et b sont deux constantes réelles .
Comme , pour tout réel x , $h(x)=3(2x-3)+5=6x-9+5=6x-4$, on peut affirmer que :
- les fonctions f , h et i sont affines ;
- la fonction i n'est pas affine .

11. Comme f est une fonction affine , l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x)=ax+b$.
En posant $x_1=10$ et $x_2=15$, on sait , grâce aux résultats du cours , que $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{18-17}{15-10}=\dfrac{1}{5}=0,2$.
Comme $f(10)=17$, on en déduit que $0,2\times 10+b=17 \Leftrightarrow b=17-2=15$.
On en conclut que , pour tout réel x : $f(x)=0,2x+15$.

12. **a)** Comme $-2<0$, on en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$ $+\infty$
f	↘



b) En calculant l'image de 500 par f , on obtient $f(500)=(-2)\times 500-5=-1005$.
Comme $f(x_A)=y_A$, on en conclut que la courbe représentative de f passe par le point A .

c) Comme $f(0)=(-2)\times 0-5=-5$ et $f(-4)=(-2)\times(-4)-5=3$ et que f est affine , sa représentation graphique est la droite passant par les points de coordonnées $(0;-5)$ et $(-4;3)$.

13. **a)** Le tableau de variation de la *fonction carrée* est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

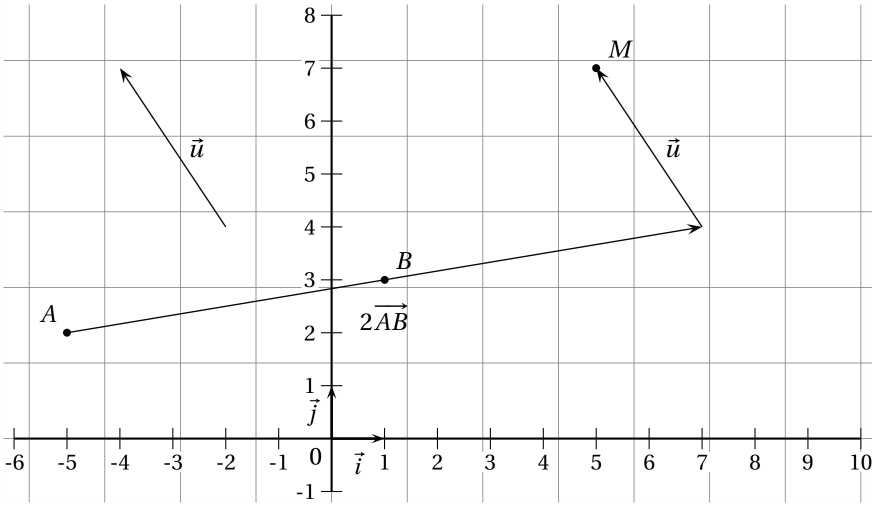
b) Comme $-0,000000001 > -0.000000002$ et que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, on en conclut que $f(A) < f(B)$.

14. En ajoutant une ligne pour les effectifs cumulés croissants , on obtient le tableau suivant :

Nombre d'enfants par femme	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de femmes	95	150	260	118	58	12	5	2
Effectifs cumulés	95	245	505	623	681	693	698	700

- Le nombre moyen d'enfants par femme est $\dfrac{95\times0+150\times1+260\times2+118\times3+58\times4+12\times5+5\times6+2\times7}{700}\approx 1,94$.
- Le nombre médian d'enfants par femme est la moyenne entre la 350ème et la 351ème valeur de la série , c'est-à-dire 3 .

15.



Exercices de recherche

EXERCICE 1

Partie A

1. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\dfrac{(-2)+(-1)}{2};\dfrac{2+4}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2};3\right)$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A)=((-1)-(-2)\ ;\ 4-2)=(1\ ;\ 2)$.
3. La distance AC est égale à $AC=\sqrt{(4-(-2))^2+(1-2)^2}=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$.
4. Voir sur la figure complète .
5. Pour savoir si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires , il suffit de calculer leur déterminant .
Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_B\ ;\ y_C-y_B)=(4-(-1)\ ;\ 1-4)=(5\ ;\ -3)$.
On en déduit que le déterminant de ces deux vecteurs est $\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & -1,5\end{vmatrix}=5\times(-1,5)-3\times(-3)=-7,5+9=-1,5\neq0$.
On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ **ne** sont **pas** colinéaires

Partie B

1. Voir sur la figure complète .
2. - Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(x_D-x_B\ ;\ y_D-y_B)=(2-(-1)\ ;\ -3-4)=(3\ ;\ -7)$.
   On en déduit que le vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\times3\ ;\ \dfrac{1}{3}\times(-7)\right)=\left(1\ ;\ -\dfrac{7}{3}\right)$
   - Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x_M-x_B\ ;\ y_M-y_B)=(x_M+1\ ;\ y_M-4)$.
   - On en déduit que les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} x_M+1=1\\ y_M-4=-\dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_M=1-1=0\\ y_F=-\dfrac{7}{3}+4=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

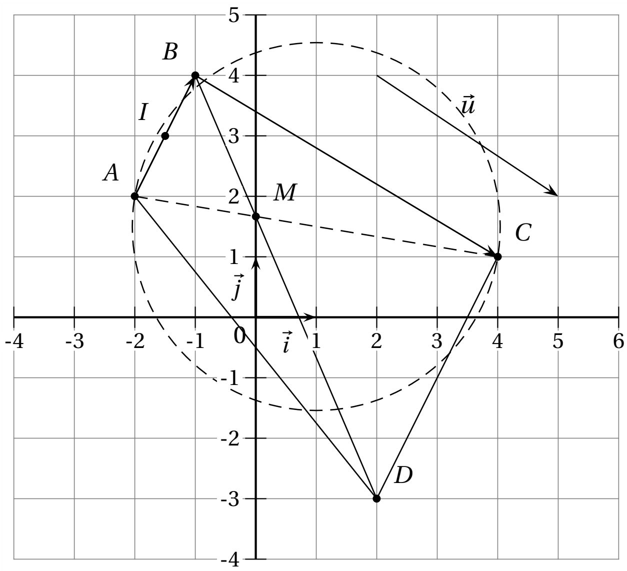
   On en conclut que le point M a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.
3. **a)** • Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 2)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_D\ ;\ y_C-y_D)=(4-2\ ;\ 1-(-3))=(2\ ;\ 4)$.
   Comme $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$, on en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et non égaux et , par suite , que $ABCD$ est un trapèze .

   b) • Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x_M-x_A\ ;\ y_M-y_A)=\left(0-(-2)\ ;\ \dfrac{5}{3}-2\right)=\left(2\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_A\ ;\ y_C-y_A)=(4-(-2)\ ;\ 1-2)=(6\ ;\ -1)$.

- Le déterminant de ces deux vecteurs est $\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 6\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -2+2 = 0$.

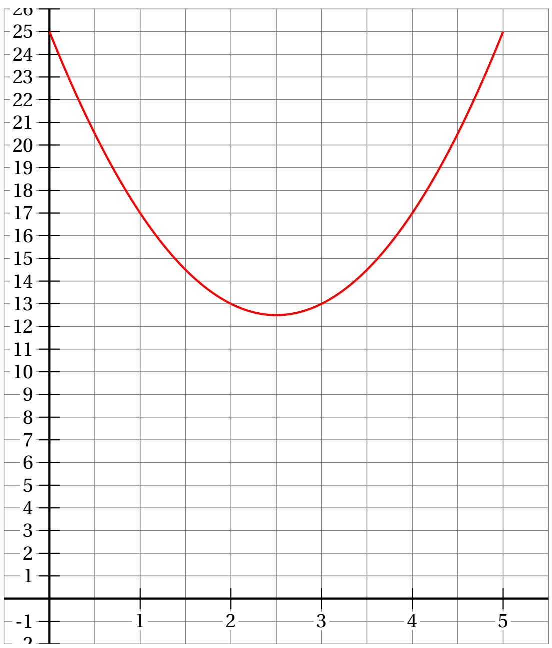
On en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et , par suite , que les points A , M et C sont alignés .

c) Le point B appartient au cercle de diamètre $[AC]$ si et seulement si le triangle BAC est rectangle en B .
Comme $AB = \sqrt{(-1-(-2))^2+(4-2)^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{(4-(-1))^2+(1-4)^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ et que (d'après les calculs effectués dans la première partie) $AC = \sqrt{37}$, on en déduit que : $AB^2+BC^2 = 5+34 = 39$ et $AC^2 = 37$.
Comme $AB^2+BC^2 \neq AC^2$, on en conclut , grâce à la contraposée du théorème de Pythagore , que le triangle BAC **n'**est **pas** rectangle en B et , par suite , que B **n'**appartient **pas** au cercle de diamètre $[AC]$



EXERCICE 2

1. Dans le triangle AEH rectangle en A , on obtient , grâce au théorème de Pythagore , que :
$EH^2 = AE^2 + AH^2 \Rightarrow EH^2 = x^2 + (5-x)^2$.
Comme $EFGH$ est un carré , son aire est égale à EH^2 . Donc , l'aire du carré $EFGH$ est égale à $A(x) = x^2+(5-x)^2$.
En développant cette expression , on obtient , pour tout $x \in [0\,;\,5]$: $A(x) = x^2+5^2-2\times5\times x+x^2 = x^2+25-10x+x^2 = 2x^2-10x+25$
2. Tracé de la courbe de la fonction A .



3. Par lecture graphique ,l'aire minimale du carré $EFGH$ est 12,5 atteinte pour $x = 2{,}5$.
4. **a)** Pour tout réel $x \in [0\,;\,5]$,
$2(x-2{,}5)^2+12{,}5 = 2(x^2-5x+6{,}25)^2+12{,}5$
$2(x-2{,}5)^2+12{,}5 = 2x^2-10x+12{,}5+12{,}5 = 2x^2-10x+25 = A(x)$
On en conclut que $A(x)$ peut s'écrire sous la forme $A(x) = 2(x-2{,}5)^2+12{,}5$.

b) En utilisant le résultat précédent , on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	2,5	5
$A(x)$	25 ↘	12,5	↗ 25

ce qui ne fait que confirmer avec éclat ce que nous conjecturions naguère par un procédé graphique de bon aloi certes , mais soumis aux aléas d'une lecture rendue difficile par un émoi légitime .