Correction des exercices

EXERCICE 1

Partie A

N	U	K
3	1	??
3	3,75	1
3	2,73	2
3	3,60	3

Partie B

1. Pour tout entier n , $4-\dfrac{1}{4}(4-u_n)^2 = 4-\dfrac{1}{4}(16-8u_n+u_n^2) = 4-4+2u_n-\dfrac{1}{4}u_n^2$.

Donc , on a bien, pour tout entier n , $u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{4}u_n^2$.

On note $P(n)\ :\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Démontrons cette propriété par récurrence :

- **Initialisation** . Comme $u_0 = 1$, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité** : supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geqslant 0$ et montrons que , sous cette hypothèse , elle l'est au rang $k+1$.
  Par hypothèse de récurrence , $0 \leqslant u_k \leqslant 4$, ce qui implique :
  $0 \leqslant u_k \leqslant 4 \Rightarrow -4 \leqslant -u_k \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 4-u_k \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant (4-u_k)^2 \leqslant 16 \Rightarrow -4 \leqslant -\dfrac{1}{4}(4-u_k)^2 \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 4-\dfrac{1}{4}(4-u_k)^2 \leqslant 4$, ce qui revient à dire que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
  La propriété est donc héréditaire .
- **Conclusion** :
  Comme la propriété est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang , elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

2. a) Pour tout entier n , $u_{n+1}-u_n = 2u_n-\dfrac{1}{4}u_n^2-u_n = u_n-\dfrac{1}{4}u_n^2 = u_n\left(1-\dfrac{1}{4}u_n\right) = u_n \times \dfrac{4-u_n}{4} = \dfrac{1}{4}u_n(4-u_n)$.

b) Comme , pour tout entier n , $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, on en déduit que $u_n \geqslant 0$ et $4-u_n \geqslant 0$.
On en déduit que $u_{n+1}-u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$ et , par suite , que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4 et croissante , elle est convergente .

3. On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ , on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
- Comme $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}u_n^2$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2u_n-\dfrac{1}{4}u_n^2\right) = 2\ell-\dfrac{1}{4}\ell^2$.
- Par unicité de la limite , on en déduit que $\ell = 2\ell-\dfrac{1}{4}\ell^2$.
- $\ell = 2\ell-\dfrac{1}{4}\ell^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\ell^2-\ell = 0 \Leftrightarrow \ell^2-4\ell = 0$.

On en conclut que ℓ est solution de l'équation $x^2-4x = 0$. Comme $x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.
On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $u_0 = 1$, $u_n \geqslant 1$, pour tout entier n , donc $\ell \geqslant 1$.
on en conclut que $\ell = 4$.

EXERCICE 2

1. Par définition des suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

- $d_1 = \dfrac{1}{2}d_0+100 = \dfrac{1}{2}\times 300+100 = 250$;
- $a_1 = \dfrac{1}{2}d_0+\dfrac{1}{2}a_0+70 = \dfrac{1}{2}\times 300+\dfrac{1}{2}\times 450+70 = 445$.

2. a) Lorsque $n = 1$, les deux nombres affichés en sorties sont $D = 250$ et $A = 420$.

b) Pour afficher les résultats souhaités (c'est-à-dire les termes de raang n de chacune des deux suites), il suffit d'inverser les instructions à l'intérieur de la boucle « Pour k variant de 1 à n ... » :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{D}{2}+70$ D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

3. a) Pour montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, il suffit d'établir qu'il existe un réel q tel que $e_{n+1} = q \times e_n$.
Or, $e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \dfrac{1}{2}d_n + 100 - 200 = \dfrac{1}{2}d_n - 100$.
Comme $e_n = d_n - 200 \Leftrightarrow d_n = e_n + 200$, on en déduit que :
$e_{n+1} = \dfrac{1}{2}(e_n + 200) - 100 = \dfrac{1}{2}e_n + 100 - 100 = \dfrac{1}{2}e_n$.
On en conclut que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b)
- Comme le terme initial de la $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $e_0 = d_0 - 200 = 300 - 200 = 100$ et qu'elle est géométrique, on sait que, pour tout entier n : $e_n = e_0 \times q^n = 100 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
- Comme, pour tout entier n, $d_n = e_n + 200$, on en déduit que : $d_n = 200 + 100 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
- Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(100 \times \dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$.

4. a) Pour tout entier n, on a $2n^2 - (n+1)^2 - = 2n^2 - (n^2 + 2n + 1) = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1$.
Le discriminant de $x^2 - 2x - 1$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$.
Comme ce discriminant est strictement positif, on en déduit que $x^2 - 2x - 1$ possède deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$textSignedex^2 - 2x - 1$		+	0	−	0	+	

Puisque $3 > 1 + \sqrt{2}$, on en déduit, en particulier, que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $2^n \geqslant n^2$ ».
Montrons cette propriété par récurrence.
- **Initialisation** . Comme $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc la propriété est vraie au rang $n = 4$.
- **Hérédité** : supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geqslant 4$ et montrons que , sous cette hypothèse , elle l'est au rang $k+1$.
  On sait que $2^{k+1} = 2 \times 2^k$.
  Or, par hypothèse de récurrence , $2^k \leqslant k^2$, ce qui implique :
  $2^{k+1} \geqslant 2 \times k^2$.
  Comme l'on sait que $2k^2 \geqslant (k+1)^2$, pour tout entier $n \geqslant 3$, on en déduit que $2^{k+1} \geqslant 2 \times k^2 \geqslant (k+1)^2$. La propriété est donc héréditaire .
- **Conclusion** :
  Comme la propriété est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang , elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 4$.

c) Pour tout entier n, $100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 100 \times n \times \dfrac{1}{2^n}$.

Comme, pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$, on en déduit que $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \geqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant 100 \times n \times \dfrac{1}{n^2} \Leftrightarrow 0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100n}{n^2} \Leftrightarrow 0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d)
- Comme, pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{100}{n}\right) = 0$, on en conclut, grâce au théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.
- Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.
- On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340\right) = 340$.

Ainsi, on en conclut que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 340.

EXERCICE 3

Partie A

1.
- $u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,189$.
  Donc, le nombre de tortues en 2001 est 189.
- $u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1-0,189) \approx 0,138$.
  Donc, le nombre de tortues en 2002 est 138.

2. a) On sait que $0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1$; on multiplie les trois membres de cette inégalité par le nombre u_n de l'intervalle $[0\,;\,1]$, donc qui est positif ou nul : $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant u_n$.

D'où on déduit en multipliant par 0,9 l'inégalité $0 \leqslant 0,9u_n(1-u_n) \leqslant 0,9u_n$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$, pour tout n.

b) On sait que, pour tout n, $u_n \in [0\,;\,1]$; donc $u_n \geqslant 0$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $u_0 \leqslant 0,3 \times 0,9^0$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie au rang k et on veut montrer que, sous cette hypothèse, elle l'est au rang $k+1$.
  D'après la question précédente : $u_{k+1} \leqslant 0,9u_k$.
  D'après l'hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^k$.
  On déduit : $u_{k+1} \leqslant 0,9 \times 0,3 \times 0,9^k$ c'est-à-dire : $u_{k+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{k+1}$.
  Donc la propriété est vraie au rang $k+1$ donc elle est héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire à partir de ce rang, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

c) Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.

Comme , pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$, on en conclut, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3. L'algorithme complet est le suivant :

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \geqslant 0,03$ faire :
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,9u(1-u)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2000+(n-1)$

Partie B

1.
   - $v_{11} = 1,06v_{10}\,(1 - v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1 - 0,032) \approx 0,033$.
     Donc, il y aura donc 33 tortues en 2011.
   - $v_{12} = 1,06v_{11}\,(1 - v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1 - 0,033) \approx 0,034$.
     Donc, il y aura donc 34 tortues en 2012.
2.
   - Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.
   - Comme, pour tout n, $v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 1,06\ell(1 - \ell)$.
   - D'après l'unicité de la limite, on peut donc dire que $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.
3. La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a a 32 tortues en 2010.
   Donc, pour tout $n \leqslant 10$, $v_n \leqslant v_0$ autrement dit $v_n \leqslant 0,032$.
   Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

EXERCICE 4

Partie A

1. Augmenter de 5 % revient multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$. Donc, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 1,05u_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$.
   Donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1,05^n$.
2. Comme $1,05 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   Cela signifie que, pour tout réel A, il existe un rang n_0 à partir duquel, $v_n > A$.
   En particulier, il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > 60$. Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{1,1}{605} \times 2x + 1,1 = -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1$.
   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1 > 0 \Leftrightarrow 1,1 > \dfrac{2,2}{605}x \Leftrightarrow \dfrac{1,1 \times 605}{2,2} > x \Leftrightarrow x < 302,5$
   Donc $g'(x) > 0$ sur $[0~;~60]$ donc g est croissante sur $[0~;~60]$.
   On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$:
   $g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\dfrac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0$.
   Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est égal à 0, cette dernière équation équivaut à $x = 0$ ou $\dfrac{1,1}{605}x + 0,1 = 0 \Leftrightarrow 0,1 = \dfrac{1,1}{605}x \Leftrightarrow x = 0,1 \times \dfrac{605}{1,1} = 55$

2) **a)** Par définition, $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$. Selon ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.
   b) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leqslant 12 \leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**
     On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ telle que la propriété soit vraie et on veut montrer que, sous cette hypothèse, elle l'est au rang $k+1$.
     Or $0 \in [0~;~60]$ et $55 \in [0~;~60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0~;~60]$ donc de $0 \leqslant u_n \leqslant 55$, on peut déduire que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55) \Leftrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$, car $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$, ce qui correspond à la propriété au rang $k+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire à partir de ce rang, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

   c) Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n \times \dfrac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times 6\right.$
   $\dfrac{1,1}{605}u_n\,(55 - u_n)$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55-u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n(55-u_n) \geqslant 0$.
On a donc démontré que $u_{n+1}-u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$, pour tout n.
Donc la suite (u_n) est croissante.

d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

e)
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
- Comme, pour tout n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}\ell^2 + 1,1\ell$.
- D'après l'unicité de la limite, on peut donc dire que $\ell = -\dfrac{1,1}{605}\ell^2 + 1,1\ell \Leftrightarrow \ell = g(\ell)$.

L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. L'algorithme complet est le suivant :

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	    u prend la valeur $1,1u - \frac{1,1}{605}u^2$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher n