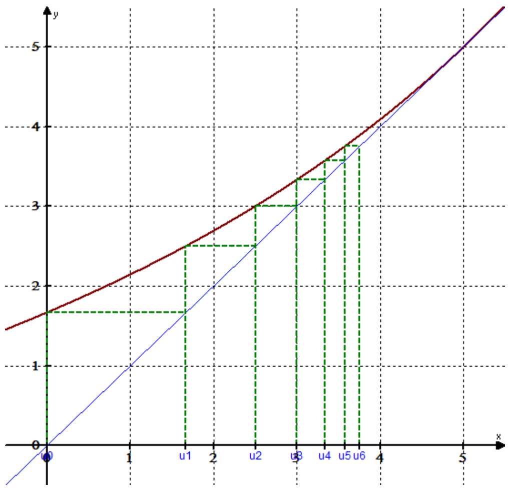
Correction de l'exercice sur les suites



Partie A

Par lecture graphique, il semblerait que :
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante;
- qu'elle soit minorée par 0 et majorée par 5 ,
- qu'elle converge vers 5.

Partie B

1. Pour tout entier n, $\dfrac{100}{15-u_n}-5=\dfrac{100}{15-u_n}-\dfrac{5(15-u_n)}{15-u_n}=\dfrac{100}{15-u_n}-\dfrac{75-5u_n)}{15-u_n}=\dfrac{100-75+5u_n}{15-u_n}=\dfrac{25+5u_n}{15-u_n}=\dfrac{5(5+u_n)}{15-u_n}$.

2. a) Montrons la propriété « $0\leqslant u_n\leqslant 5$ », par récurrence.
- **Initialisation** : Comme $u_0=0$, on a bien $0\leqslant u_0\leqslant 5$.
  Donc , la propriété est vraie au rang $n=0$.
- **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel $k\geqslant 0$ et montrons que , sous cette hypothèse, elle l'est au rang suivant .
  Si $0\leqslant u_k\leqslant 5$, alors $-5\leqslant -u_k\leqslant 0\Rightarrow 10\leqslant 15-u_k\leqslant 15\Rightarrow \dfrac{1}{15}\leqslant\dfrac{1}{15-u_k}\leqslant\dfrac{1}{10}\Rightarrow\dfrac{20}{3}\leqslant\dfrac{100}{15-u_k}\leqslant 10\Rightarrow\dfrac{5}{3}\leqslant\dfrac{100}{15-u_k}-5\leqslant 5$
  , ce qui établit la propriété au rang $k+1$.
- **Conclusion** : Comme la propriété $P(n)$ est vraie pour $n=0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on en en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$.

b) Pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5(5+u_n)}{15-u_n}-u_n=\dfrac{5(5+u_n)}{15-u_n}-\dfrac{u_n(15-u_n)}{15-u_n}=\dfrac{25+5u_n-15u_n+u_n^2}{15-u_n}=\dfrac{u_n^2-10u_n+25}{15-u_n}=\dfrac{(u_n-5)^2}{15-u_n}$.
Un carré étant toujours positif ou nul, $(u_n-5)^2\geqslant 0$.
Comme $u_n\leqslant 5$, on a $15-u_n\geqslant 10>0$.
On en conclut que , pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0\leftrightarrow u_{n+1}\geqslant u_n$ et, par suite, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Partie C

- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 5, on en conclut qu'elle converge vers une limite L.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=L$.
  Puisque $u_{n+1}=\dfrac{5(u_n+5)}{15-u_n}$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5(u_n+5)}{15-u_n}\right)=\dfrac{5(L+5)}{15-L}$.
  Par unicité de la limite, on en déduit que : $L=\dfrac{5(L+5)}{15-L}\Leftrightarrow L(15-L)=5(5+L)$. Donc, L est solution de l'équation $x(15-x)=5(5+x)$.
- $x(15-x)=5(5+x)\Leftrightarrow 15x-x^2=25+5x\Leftrightarrow x^2-10x+25=0\Leftrightarrow (x-5)^2=0\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$.
  On en conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 5.

Partie D

1. Montrons la propriété « $5-\dfrac{10}{n}\leqslant u_n\leqslant 5$ », par récurrence.
- **Initialisation** : Comme $u_0=0$, on obtient : $u_1=\dfrac{5(u_0+5)}{15-u_0}=\dfrac{25}{15}=\dfrac{5}{3}$ et $u_2=\dfrac{5(u_1+5)}{15-u_1}=\dfrac{\frac{100}{3}}{\frac{40}{3}}=\dfrac{5}{2}$.
  Comme $5-\dfrac{10}{2}=0$, on a bien $5-\dfrac{10}{2}\leqslant u_2\leqslant$. Donc , la propriété est vraie au rang $n=2$.

- **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel $k \geqslant 2$ et montrons que , sous cette hypothèse, elle l'est au rang suivant .
Si $5-\dfrac{10}{k} \leqslant u_k \leqslant 5$, alors $-5 \leqslant -u_k \leqslant \dfrac{10}{k}-5 \Rightarrow 10 \leqslant 15-u_k \leqslant 10+\dfrac{10}{k} \Leftrightarrow 10 \leqslant 15-u_k \leqslant \dfrac{10k+10}{k} \Rightarrow \dfrac{k}{10k+10} \leqslant \dfrac{1}{15-u_k} \leqslant \dfrac{1}{10}$,
On en déduit que $\dfrac{10k}{k+1} \leqslant \dfrac{100}{15-u_k} \leqslant 10 \Rightarrow \dfrac{10k}{k+1}-5 \leqslant \dfrac{100}{15-u_k}-5 \leqslant 5$.
Comme $\dfrac{10k}{k+1}-5=\dfrac{10k-5(k+1)}{k+1}=\dfrac{5k-5}{k+1}=\dfrac{5(k+1)-10}{k+1}=5-\dfrac{10}{k+1}$, on en déduit que $5-\dfrac{10}{k+1} \leqslant \dfrac{100}{15-u_k}-5 \leqslant 5$. ce qui établit la propriété au rang $k+1$.
- **Conclusion** : Comme la propriété $P(n)$ est vraie pour $n=2$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on en en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Comme, pour tout entier $n \geqslant 2$, $5-\dfrac{10}{n} \leqslant u_n \leqslant 5$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(5-\frac{10}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}(5)=5$, on en conclut, grâce au théorème des gendarmes, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 5.

Partie E

1. a)
- Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\dfrac{15}{5-u_{n+1}}=\dfrac{15}{5-\dfrac{100}{15-u_n}+5}=\dfrac{15}{10-\dfrac{100}{15-u_n}}=\dfrac{15}{\dfrac{150-10u_n-100}{15-u_n}}=\dfrac{15}{\dfrac{50-10u_n}{15-u_n}}$,
Donc, $v_{n+1}=15\times\dfrac{15-u_n}{50-10u_n}=\dfrac{3(15-u_n)}{10-2u_n}=\dfrac{3(15-u_n)}{2(5-u_n)}$.
- Pour montrer que la suite (v_n) est arithmétique, il suffit de vérifier que la différence entre deux termes consécutifs est constante.
Or, pour tout entier n, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{3(15-u_n)}{2(5-u_n)}-\dfrac{15}{5-u_n}=\dfrac{3(15-u_n)}{2(5-u_n)}-\dfrac{30}{2(5-u_n}=\dfrac{45-3u_n-30}{2(5-u_n)}=\dfrac{15-3u_n}{2(5-u_n)}$.
Puisque $15-3u_n=3(5-u_n)$, on en déduit que $v_{n+1}-v_n=\dfrac{3(5-u_n)}{2(5-u_n)}=\dfrac{3}{2}$.
On en conclut que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=\dfrac{3}{2}$ et de terme initial $v_0=\dfrac{15}{5-u_0}=\dfrac{15}{5-0}=3$.

b)
- Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=\dfrac{3}{2}$ et de terme initial $v_0=3$, on obtient, pour tout entier n, $v_n=v_0+n\times\dfrac{3}{2}=3+\dfrac{3n}{2}=\dfrac{6+3n}{2}$. Puisque $v_n=\dfrac{15}{5-u_u}$, on en déduit que $5-u_n=\dfrac{15}{v_n} \Leftrightarrow -u_n=\dfrac{15}{v_n}-5 \Leftrightarrow u_n=-\dfrac{15}{v_n}+5=\dfrac{5v_n-15}{v_n}$.

2. On a vu que $u_1=\dfrac{5}{3}=\dfrac{5\times 1}{1+2}$ et $u_2=\dfrac{5}{2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5\times 2}{2+2}$.
Si l'on calcule les termes suivants, on obtient $u_3=\dfrac{3}{=}\dfrac{15}{5}=\dfrac{5\times 3}{3+2}$.
On peut conjecturer que, pour tout entier n , $u_n=\dfrac{5n}{2+n}$.
Montrons cette propriété par récurrence.
- **Initialisation** : Comme $u_0=0$ et que $\dfrac{5\times 0}{3+0}$, on a bien $u_0=\dfrac{5\times 0}{3+0}$. Donc , la propriété est vraie au rang $n=0$.
- **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel $k \geqslant 0$ et montrons que , sous cette hypothèse, elle l'est au rang suivant .
On sait que $u_{k+1}=\dfrac{100}{15-u_k}-5$.
Comme, par hypothèse de récurrence, $u_k=\dfrac{5k}{2+k}$, on en déduit que $u_{k+1}=\dfrac{100}{15-\dfrac{5k}{k+2}}-5=\dfrac{100}{\dfrac{15(k+2)-5k}{2+k}}-5$, donc $u_{k+1}=$
$\dfrac{100}{\dfrac{15k+30-5k}{k+2}}-5=\dfrac{100}{\dfrac{10k+30}{k+2}}-5=100\times\dfrac{k+2}{10k+30}=\dfrac{10k+20}{k+3}-5=\dfrac{10k+20-5(k+3)}{k+3}=\dfrac{10k+20-5k-15}{k+3}=\dfrac{5(k+1)}{(k+1)+2}$
ce qui établit la propriété au rang $k+1$.
- **Conclusion** : Comme la propriété $P(n)$ est vraie pour $n=2$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on en en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

3. Comme $u_n=\dfrac{5n}{n+2}=\dfrac{5n}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=\dfrac{5}{1+\dfrac{2}{n}}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$, on en conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 5.