Classes de Seconde

CORRECTION DU DEVOIR COMMUN

EXERCICE 1

1.a) L'ensemble de définition de f est l'ensemble des abscisses des points de C_f , c'est-à-dire **[-2 ; 14]** .

1.b) • Déterminer l'image de 6 par f revient à déterminer l'ordonnée du point de C_f ayant pour abscisse 6 .
Par lecture graphique , on obtient ainsi que $\boldsymbol{f(6) = 1}$.

1.c) $f(0)$ est l'image de 0 par f .
Par le même procédé de lecture graphique que précédemment , on obtient $\boldsymbol{f(0)} = y_B = \mathbf{2{,}5}$.

1.d) Les antécédents de 2 par la fonction f sont les abscisses des points de C_f ayant pour ordonnée 2 .
On en déduit , par lecture graphique , que **les antécédent de 2 par f sont -0,2 ; 5,4 et 13** .

1.e) Les nombres n'ayant qu'un antécédent par f sont les nombres y vérifiant $\boldsymbol{y = 4{,}2}$ **ou** $\boldsymbol{-5 \leq y < -2}$.

1.f) Déterminer les réels x tels que $f(x) \leq 0$ revient à déterminer les abscisses des points de C_f situés sous l'axe des abscisses .
Déterminer les réels x tels que $f(x) \geq 0$ revient à déterminer les abscisses des points de C_f situés au-dessus de l'axe des abscisses .
On en déduit le tableau de signes suivant :

Valeurs de x	-2		-1		6,5		10		14
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

1.g) Le tableau de variations de f est le suivant :

Valeurs de x	- 2		2		8		14
Variations de f			4,2				3
		↗		↘		↗	
	-5				-2		

1.h) D'après le tableau de variations (ou le graphique) , le **maximum de f sur [-2 ; 14] est 4,2** et le **minimum est -5** .

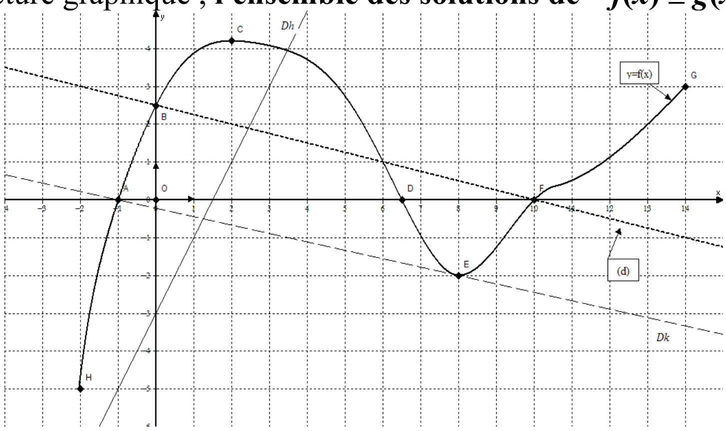
1.i) L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est l'ordonnée de B , c'est-à-dire 2,5 .

Le coefficient directeur de (d) est $\dfrac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \dfrac{-2{,}5}{10} = -0{,}25$.

L'expression de $g(x)$ est $\boldsymbol{g(x) = -0{,}25x + 2{,}5}$.

1.j) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points de C_f situés sous la droite (d) . Par lecture graphique , **l'ensemble des solutions de $f(x) \leq g(x)$ est $[-2 ; 0] \cup [6 ; 10]$** .

2.a) Tracé complet :



2.b) Comme la fonction k est une fonction affine , elle a une expression de la forme $k(x) = mx + p$.
Comme sa courbe représentative passe par A et E , on en déduit que $k(-1) = 0$ et $k(8) = -2$.

On sait , d'après les formules du cours , que $m = \dfrac{k(8) - k(-1)}{8 - (-1)} = \dfrac{-2 - 0}{8 + 1} = -\dfrac{2}{9}$.

On en déduit que $k(x)$ est de la forme $k(x) = -\dfrac{2}{9}x + p$.

Comme $k(8) = -2$, on en déduit que $-\dfrac{2}{9} \times 8 + p = -2 \iff -\dfrac{16}{9} + p = -2 \iff p = -2 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{-2}{9}$.

On en conclut que k est la fonction définie par : $\boldsymbol{k(x) = -\dfrac{2}{9}x - \dfrac{2}{9}}$.

EXERCICE 2

1.a) Forme développée de $f(x)$

Pour tout réel x , $f(x) = 12x^2 + 8x - 6x - 4 - (16x^2 - 8x - 12x + 6)$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = 12x^2 + 2x - 4 - (16x^2 - 20x + 6)$.
On en déduit que $\boldsymbol{f(x)} = 12x^2 + 2x - 4 - 16x^2 + 20x - 6 = \boldsymbol{- 4x^2 + 22x - 10}$.

Forme factorisée de $f(x)$

Pour tout réel x , $\boldsymbol{f(x)} = (4x - 2) [(3x + 2) - (4x - 3)] = (4x - 2) (3x + 2 - 4x + 3) = \boldsymbol{(4x - 2) (5 - x)}$

1.b) Comme $4x - 2 = 2 (2x - 1)$, on déduit de ce qui précède que , pour tout réel x : $\boldsymbol{f(x) = 2 (2x - 1) (5 - x)}$.

2.a) L'image de 3 par f est $\boldsymbol{f(3)} = -4\times3^2 + 22\times3 - 10 = - 36 + 66 - 10 = \mathbf{20}$.

2.b) Signe de $f(x)$

Valeurs de x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
***Signe de* 4x - 2**		-	0	+		+	
***Signe de* 5 - x**		+		+	0	-	
***Signe de* $f(x)$**		-	0	+	0	-	

On en conclut que **l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l** $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup]5 ; +\infty[$.

2.c) L'équation $f(x) = -10$ équivaut à $- 4x^2 + 22x - 10 = -10$ $\Leftrightarrow$ $- 4 x^2 + 22x = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x (-2x + 11) = 0$.
Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , on en déduit que l'équation $f(x) = -10$ équivaut à $2x = 0$ ou $-2x + 11$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $x = \frac{11}{2}$.

On en conclut que **l'ensemble des solutions de $f(x) = -10$ est** $\left\{0 ; \frac{11}{2}\right\}$.

EXERCICE 3

1.

29 700	2
14 850	2
7 425	3
2 475	3
825	3
275	5
55	5
11	11
1	

La décomposition de 29 700 en produit de facteurs premiers est :

$$29\,700 = 2^2\times3^3\times5^2\times11 .$$

La bonne réponse est donc la réponse **A .**

2. Comme $54 = 2\times27 = 2\times3^3$, on a $54^{10} = (2\times3^3)^{10} = 2^{10}\times3^{3\times10} = 2^{10}\times3^{30}$. La bonne réponse est donc la **C .**

3. Comme $1134 = 2\times3^4\times7$ et $1260 = 2^2\times3^2\times5\times7$, on en déduit que le *pgcd* de 1134 et 1260 est :
$$2\times3^2\times7 = 126 .$$
La bonne réponse est donc la réponse **B .**

4. Comme $\pi > 3$, $3 - \pi$ est négatif , donc $|3 - \pi| = - (3 - \pi) = \pi - 3$.
La bonne réponse est donc la **B .**

5. $|x - 99| \leq 2$ $\Leftrightarrow$ $-2 \leq x - 99 \leq 2$ $\Leftrightarrow$ $99 - 2 \leq x \leq 99 + 2$ $\Leftrightarrow$ $97 \leq x \leq 101$ $\Leftrightarrow$ $x \in [97 ; 101]$.
La bonne réponse est donc la **A .**

6. Les triangles ont des angles aux sommets de même mesure (90° , 55° et 35°) . Ils sont donc semblables .
La bonne réponse est donc la **C .**

7. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens opposé et $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, donc $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

La bonne réponse est donc la **D .**

8. Comme $\vec{u} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PR}$, la bonne réponse est donc la **A .**

EXERCICE 4

I.2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ **a pour coordonnées** $(x_B - x_A ; y_B - y_A) = (-1 - 1 ; -1 - 2) = \mathbf{(-2 ; -3)}$.
Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ **a pour coordonnées** $(x_C - x_D ; y_C - y_D) = (2 - 4 ; -3 - 0) = \mathbf{(-2 ; -3)}$.
Comme ils ont les mêmes coordonnées , on en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux , ce qui revient à dire que ***ABCD* est un parallélogramme** .

I.3. On sait , que le point I , milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$.

On en déduit que **les coordonnées de I sont** $\left(\frac{1+2}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)}$.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme , ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu , donc l**e milieu de $[BD]$ est le point I** .

I.4. Comme le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est orthonormal :

$$AI=\sqrt{(x_I-x_A)^2+(y_I-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$ID=\sqrt{(x_D-x_I)^2+(y_D-y_I)^2}=\sqrt{\left(4-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

Comme $AI = ID$, le triangle AID est isocèle en I .

Comme $AD^2 = 13$ et $AI^2+ID^2=\frac{26}{4}+\frac{26}{4}=\frac{26}{2}=13$, on en déduit que $AD^2 = AI^2 + ID^2$.

On en conclut , grâce à la réciproque du théorème de Pythagore , que AID est rectangle en I .

Le triangle **AID est donc rectangle isocèle en I , donc $ABCD$ est un carré (ses diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires) .**

II.2. Comme $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$, le point **H est le milieu du segment $[CG]$** .

II.3. Grâce à la relation de Chasles , on peut écrire : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$.

Comme , d'après l'énoncé , $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CF}=2\ \overrightarrow{CB}$, on en déduit que : $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$.

Or , comme $ABCD$ est un parallélogramme , $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{EF}}=-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$.

II.4. Coordonnées de G

Comme $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-2 ; -3) , $\overrightarrow{DG}=3\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3×(-2) ; 3×(-3)) = (-6 ; -9) .

De plus , on sait que $\overrightarrow{DG}$ a pour coordonnées $(x_G - x_D ; y_G - y_D) = (x_G - 4 ; y_G)$.

On déduit de ce qui précède les égalités : $\begin{cases} x_G-4=-6 \\ y_G=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=-2 \\ y_G=-9 \end{cases}$.

On en conclut que **les coordonnées de G sont (-2 ; -9)** .

Coordonnées de H

Comme les vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont pour coordonnées respectives $(x_C - x_H ; y_C - y_H) = (2 - x_H ; -3 - y_H)$ et $(x_G - x_H ; y_G - y_H) = (-2 - x_H ; -9 - y_H)$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées $(2 - x_H - 2 - x_H ; -3 - y_H - 9 - y_H) = (- 2 x_H ; -12 - y_H)$.

Comme $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$, on en déduit que : $\begin{cases} -2x_H=0 \\ -12-2y_G=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=0 \\ y_H=-6 \end{cases}$.

On en conclut que **les coordonnées de H sont (0 ; -6)** .

II.5. Les coordonnées de $\overrightarrow{HG}$ sont $(x_G - x_H ; y_G - y_H) = (-2 - 0 ; -9 - (-6)) = (-2 ; -3)$.

Comme ils ont les mêmes coordonnées , on en conclut que **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux** .

II.6. Comme , d'après la question précédente , $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$ et que , d'après la question 3 , $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$, on en conclut que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ et , par suite , que **le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme** .