Correction du devoir commun

EXERCICE 1

1. **a)** Déterminer l'image de -5 revient à déterminer l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ayant pour abscisse -5 .
Par lecture graphique , on obtient ainsi que f(-5) = 1 .
On peut utiliser une méthode identique , pour compléter chaque colonne du tableau de valeurs :

Valeurs de x	-5	-2	3	5	1
Valeurs de $f(x)$	1	$3,2$	5	-1	7

b) • Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$et de la droite d'équation $y = 2$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathscr{S} = \{-3; 4,2; 8\}$.

• Comme la droite d'équation $y = 8$ n'a aucun point d'intersection avec la courbe $(\mathscr{C})$, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 8$ est $=\varnothing$.

c) Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 5$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de la droite d'équation $y = 5$.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathscr{S} = [-5\ ;\ -1] \cup [3\ ;\ 9]$.

d) • Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de l'axe des abscisses .

• Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de l'axe des abscisses .

x	-5		$4,7$		$7,3$		9
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) Le tableau de variations complet pour la fonction f est le suivant :

x	-5		1		6		9
$f(x)$			7				3
		↗		↘		↗	
	1				-3		

f) • D'après le tableau de variations , le maximum de f sur $[-5\ ;\ 9]$ est 7 ; il est atteint en $x = 1$.

• Le minimum de f sur $[-5\ ;\ 9]$ est -3 ; il est atteint en $x = 6$.

2. **a)** Comme g est une fonction affine , sa représentation graphique est une droite que l'on notera $(\mathscr{D}_g)$.
Comme $g(1) = 5$ et $g(4) = -1$, $(\mathscr{D}_g)$ passe donc par les points de coordonnées $(1\ ;\ 5)$ et $(4\ ;\ -1)$.

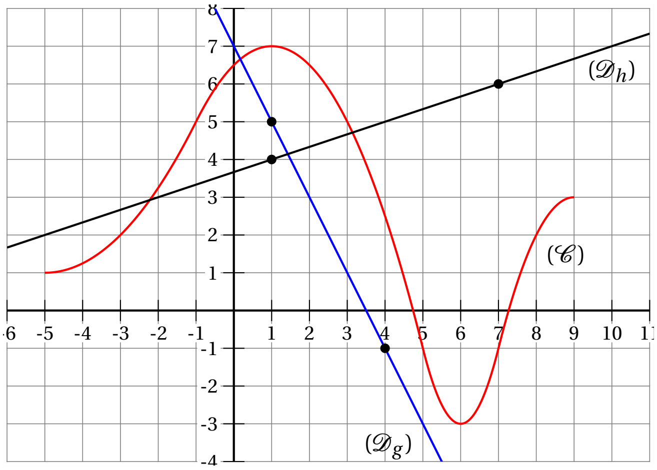
b) Comme g est une fonction affine , l'expression de $g(x)$ est de la forme $g(x) = ax + b$.
En posant $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$, on sait , grâce aux résultats du cours , que $a = \dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{(-1) - 5}{4 - 1} = \dfrac{-6}{3} = -2$.
Comme $g(1) = 5$, on en déduit que $(-2) \times 1 + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 + 2 = 7$.
On en conclut que , pour tout réel x : $g(x) = -2x + 7$.

3. **a)** Comme h est une fonction affine et que $h(1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{11}{3} = 4$ et $h(7) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{11}{3} = 6$, on en déduit que la représenation graphique de h est la droite $(\mathscr{D}_h)$ passant par les points de coordonnées $(1\ ;\ 4)$ et $(7\ ;\ 6)$.

b) • Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = h(x)$ revient à déterminer l'abscisse du point d'intersection des droites $(\mathscr{D}_g$ et $(\mathscr{D}_h$.
On obtient ainsi , par lecture graphique , que l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ est $\mathscr{S} = \{1,3\}$.

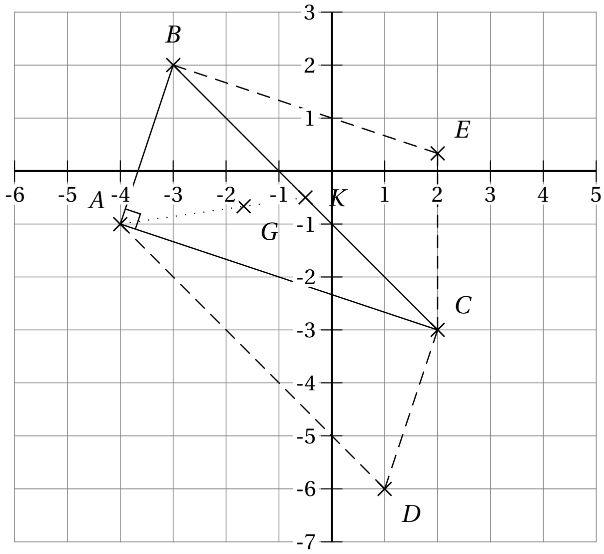
• L'équation $g(x) = h(x)$ équivaut à $7 - 2x = \dfrac{x}{3} + \dfrac{11}{3} \Leftrightarrow -2x - \dfrac{x}{3} = \dfrac{11}{3} - 7 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{3}x = -\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\dfrac{10}{3}}{-\dfrac{7}{3}} = \dfrac{10}{3} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{10}{7}$.

Donc , par le calcul , on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ est $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{10}{7}\right\}$.



EXERCICE 2

1. Figure complète :



2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A) = (-3+4; 2+1) = (1;3)$.
   On en déduit que $AB = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ car le repère est orthonormé, et comme l'unité est le cm, on a $AB = \sqrt{10}$ cm .
3. On va utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. D'après le schéma, il semble rectangle en A .
   $BC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25\times 2 = 50$ et $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 = 10 + 4\times 10 = 50$. On obtient bien $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc le triangle est rectangle en A.
4. **a)** Le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_C}{2} ; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{-3+2}{2} ; \dfrac{2+(-3)}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

   b) Dire que G appartient à (AK) revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires .
   Or , $\overrightarrow{AG}\left(\dfrac{7}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AK}\left(\dfrac{7}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$ après calculs.
   On teste alors la condition de colinéarité et l'on montre que les points G , A et K sont alignés.

   c) **Deux méthodes** :

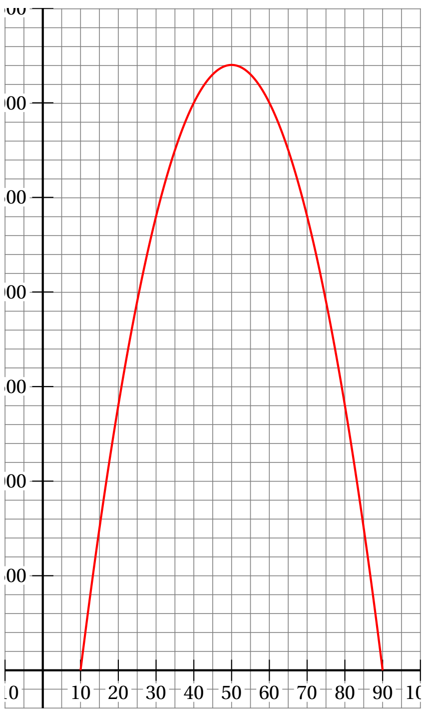
   - Soit on se souvient que le centre de gravité est situé aux deux tiers de la médiane en partant d'un sommet il suffit alors de vérifier en calculant leurs coordonnées que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.
   - Soit, on montre que G est le point d'intersection de deux médianes. C'est déjà fait pour une : (AK), il reste donc à refaire la même chose pour une autre médiane.
5. Le plus simple est de rappeler que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   Or , $\overrightarrow{AB}(1 ; 3)$ et $\overrightarrow{DC}(2 - x_D ; -3 - y_D)$, donc : $\begin{cases} 2 - x_D = 1 \\ -3 - y_D = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_D = -1 \\ -y_D = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -6 \end{cases}$.
   On obtient donc $D(1 ; -6)$ comme on l'observe sur le graphique.

6. **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{BE}\left(5\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;\,2)$.
Or , $\dfrac{x_{\overrightarrow{BE}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{x_{\overrightarrow{BE}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{5}{6}$ donc $\overrightarrow{BE} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
 b) On en déduit la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc le parallélisme des droites (AC) et (BE), ce qui permet d'affirmer que le quadrilatère $BECA$ est un trapèze.
 c) Par contre ce n'est pas un parallélogramme car les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas égaux.

7. pour calculer BE on peut utiliser la formule habituelle ou se servir de $\overrightarrow{BE} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$, d'où $BE = \dfrac{5}{6}AC = \dfrac{5}{6}\times 2\sqrt{10} = \dfrac{5}{3}\sqrt{10}$ L'aire du trapèze est donc : $\dfrac{BE+AC}{2}\times AB$, car la hauteur est AB puisque (AB) est perpendiculaire à (AC) .
On obtient $\dfrac{\frac{5}{3}\sqrt{10}+2\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10} = \dfrac{\frac{11}{3}\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10} = \dfrac{110}{6} = \dfrac{55}{3} \approx 18,33$ (arrondi au mm^2)

EXERCICE 3

1. **Première tentative**
 a) Si $AB = 30$ cela signifie que $BE = 20$, la largeur de l'aire de baignade est donc de 20 m .
 Pour la longueur : On sait que le cordon fait 180 m, mais on a besoin de 30 m pour le côté AB et d'autant pour CD donc il nous reste 180-60=120 m pour la longueur. L'aire est donc de $120\times 20 = 2400\text{m}^2$.
 b) À moins de prendre $AB = 70$, on trouve une valeur différente. Par exemple avec $AB = 40$, on trouve une largeur de 30 m et une longueur de 100 m donc une aire de 3000m^2 .
2. **Modélisation** On constate que la surface de l'aire de baignade est fonction de la distance AB.
On pose alors $AB = x$ et on note $A(x)$ la surface de l'aire de baignade en m^2
 a) $x \in [10\,;\,90]$ car $x = AB$, or $AB \geqslant 10$ sinon le cordon reste sur le sable et $AB \leqslant 90$, car avec le cordon il faut au moins faire un aller-retour, or la longueur totale est de 180 m.
 b) $AB + BC + CD = 180$ or $AB = CD = x$, donc $180 - 2x = BC$.
 c) L'aire de baignade est rectangulaire, on la calcule donc par le produit « longueur fois largeur ». Mais ici la longueur est $BC = 180 - 2x$ et la largeur est $BE = AB - AE$ (car $E \in [AB]$) soit $BE = x - 10$. On obtient donc pour tout $x \in [10\,;\,90]$, $A(x) = (180-2x)(x-10)$.
 On développe : $A(x) = (180-2x)\times(x-10) = 180x - 1800 - 2x^2 + 20x = -2x^2 + 200x - 1800$.



3. **Observations**
 a) Tableau de valeurs complet :

Valeurs de x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Valeurs de $A(x)$	0	1400	2400	3000	3200	3000	2400	1400	0

 b) Tracé de la courbe de la fonction A
 Voir graphique ci-contre .
 c) L'aire de baignade semble dépasser les 3000 m^2 lorsque la distance AB est comprise entre 40 et 60 m.
 d) L'aire semble maximale pour $AB = 50$m (entre 40 et 60 en tout cas) et ce maximum semble d'environ 3200m^2

4. **Démonstration de la première observation**

a) On développe :$3200-2(x-50)^2 = 3200-2(x^2-2\times 50\times x+50^2) = 3200-2x^2+200x-5000 = -2x^2+200x-1800 = A(x)$.
On reconnaît bien la forme développée de $A(x)$, donc l'égalité est vraie : pour tout $x \in [10\ ;\ 90]$, $A(x) = 3200-2(x-50)^2$.

b) On utilise la forme canonique précédemment obtenue : $A(x) \geqslant 3000 \Rightarrow 3200-2(x-50)^2 \geqslant 3000 \Rightarrow 200-2(x-50)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 100-(x-50)^2 \geqslant 0$ en retranchant 3000 de chaque côté avant de diviser par 2 (positif, donc l'ordre est conservé) de chaque côté.

c) En utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, on obtient $100-(x-50)^2 = 10^2-(x-50)^2 = [10-(x-50)] \times [10+(x-50)] = (60-x)(x-40)$

d) On résout $60-x = 0$ et $x-40 = 0$, puis en utilisant le résultat sur le signe d'une fonction affine on obtient :

x	10		40		60		90
signe de $60-x$		+	|	+	0	−	
signe de $x-40$		−	0	+	|	+	
signe du produit		−	0	+	0	−	

On peut donc affirmer que : $(60-x)(x-40) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [40;60]$.
Or , la première inéquation est équivalente, d'après le 4.b) et 4.c) à $A(x) \geqslant 3000$.
On retrouve bien le résultat observé, l'aire de baignade dépasse 3000m^2 pour AB compris entre 40 et 60 m.

5. Démonstration de la seconde observation :

- **Première méthode** : pour tout x , $(x-50)^2 \geqslant 0$ car c'est un carré , $-2(x-50)^2 \leqslant 0$ donc pour tout x (on multiplie par un négatif) , puis , en ajoutant 3200 , on on obtient que $A(x) = 3200-2(x-50)^2 \leqslant 3200$, pour tout x.
On ne dépassera pas 3200 m^2, or pour $x = 50$, $A(50) = 3200$, donc cette valeur est atteinte, c'est donc le maximum de la fonction. (Comme observé, atteint pour $AB = 50$m) (Résultat de cours pour certaines classes)
- **Deuxième méthode** : On sait que A est une fonction polynôme de degré 2 (d'après sa forme développée) dont le coefficient de x^2 est négatif (-2), on sait donc que la fonction A est croissante puis décroissante, et que le sens de variation change pour l'abscisse du sommet de la parabole.
Or cette parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 50$ (puisque 30 et 70 (ou encore 40 et 60) ont la même image).
On peut en déduire le tableau de variation et donc le maximum : 3200 pour $x = 50$.

6. La longueur du cordon est égale à $20+\pi r = 180$ donc $r = \dfrac{160}{\pi}$ et donc l'aire de baignade est égale à

$\dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi \times \dfrac{160^2}{\pi^2}}{2} = \dfrac{12800}{\pi} \approx 4074{,}37\text{m}^2$, ce qui est nettement supérieur à 3200m^2. Est-ce plus pratique ?