EXERCICE 1

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est égal à 0.

Or, $dét(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} 2{,}8 & -2{,}1 \\ -4{,}8 & 3{,}6 \end{vmatrix}=2{,}8\times3{,}6-(-4{,}8)\times(-2{,}1)=0$.

Donc, les vecteurs $\vec{u}(2{,}8;-2{,}1)$ et $\vec{v}(-4{,}8;3{,}6)$ sont colinéaires.

2. *On note A, B et C les points de coordonnées respectives* (1 ; 5) , (7 ; 3) *et* (-3 ; 9) .

2.a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A) = (7 - 1 ; 3 - 5) = (6 ; -2)$.

2.b) Le milieu K de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1+(-3)}{2};\frac{5+9}{2}\right)=(-1;7)$.

2.c) La longueur AB est égale à

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

EXERCICE 2

On note (D), *la droite d'équation cartésienne* $2x - 5y + 8 = 0$,
A , B et C les points de coordonnées respectives (-1 ; 4,2) , (0,5 ; 4,8) et C(6,5 ; 4,2)

1. Comme (D) a pour équation cartésienne $2x - 5y + 8 = 0$, le vecteur $\vec{v}$ (-(-5) ; 2) = (5 ; 2) est un vecteur directeur de (D).

Pour montrer que (D) et (AB) sont parallèles, il suffit de vérifier qu'un vecteur directeur de (D) est colinéaire à un vecteur directeur de (AB) .

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)=(0{,}5-(-1);4{,}8-4{,}2)=(1{,}5;0{,}6)$

et $dét(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1{,}5 & 0{,}6 \end{vmatrix}=5\times0{,}6-2\times1{,}5=0$.

Comme leur déterminant est nul, on en conclut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et, par suite, que les droites (D) et (AB) sont parallèles.

2. Comme $2\times x_C - 5\times y_C + 8 = 2\times6{,}5 - 5\times4{,}2 + 8 = 0$, on en conclut que le point C appartient à la droite (D) .

3.a) Un point $M(x ; y)$ appartient à (D_2) si et seulement si $dét(\overrightarrow{CM};\vec{u})=0$.

Or, $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_C ; y_M - y_C) = (x - 6{,}5 ; y - 4{,}2)$.

Donc, $dét(\overrightarrow{CM};\vec{u})=\begin{vmatrix} x-6{,}5 & y-4{,}2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3\times(x-6{,}5)-(-2)\times(y-4{,}2)=3x-19{,}5+2y-8{,}4=3x+2y-27{,}9$.

On en conclut qu'une équation cartésienne de (D_2) est $3x + 2y - 27{,}9 = 0$.

Comme $3x + 2y - 27{,}9 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 27{,}9 \Leftrightarrow y = -1{,}5x + 13{,}95$, le coefficient directeur de (D_2) est égal à -1,5.

3.b) Un point $M(x ; y)$ appartient à (BC) si et seulement si $dét(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC})=0$.

Or, $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_B ; y_M - y_B) = (x - 0{,}5 ; y - 4{,}8)$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x_C - x_B ; y_C - y_B) = (6{,}5 - 0{,}5 ; 4{,}2 - 4{,}8) = (6 ; -0{,}6)$.

$dét(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM})=\begin{vmatrix} x-0{,}5 & y-4{,}8 \\ 6 & -0{,}6 \end{vmatrix}=-0{,}6\times(x-0{,}5)-6\times(y-4{,}8)=-0{,}6x+0{,}3-6y+28{,}8=-0{,}6x-6y+29{,}1$

On en conclut qu'une équation cartésienne de (BC) est $-0{,}6x - 6y + 29{,}1 = 0$.

4. Comme $x_A = x_E = -1$, une équation de (AE) est $x = -1$.

Comme $y_E = y_F = 2$, une équation de (EF) est $y = 2$.

5.a) Le rayon de cercle (C_1) est $R=GF=\sqrt{(x_F-x_G)^2+(y_F-y_G)^2}=\sqrt{(3-6)^2+(2-7)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Un point $M(x ; y)$ appartient à (C_1) si et seulement si $GM = \sqrt{34} \Leftrightarrow GM^2 = 34 \Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 34$
$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 14y + 49 = 34 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 14y + 51 = 0$.

On en conclut que l'équation cartésienne de (C_1) est $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 51 = 0$.

5.b) Le point B appartient à (C_1) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.

Comme $x_B^2 + y_B^2 - 12\times x_B - 14\times y_B + 51 = 0{,}5^2 + 4{,}8^2 - 12\times0{,}5 - 14\times4{,}8 + 51 = 1{,}09 \neq 0$, on en conclut que le point B n'appartient pas à (C_1).

6. Le cercle (C_2) de diamètre $[FG]$ est le cercle de centre Ω , milieu de $[FG]$ et de rayon $\frac{FG}{2}$.

Or, le milieu H de $[FG]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_F+x_G}{2};\frac{y_F+y_G}{2}\right)=\left(\frac{3+6}{2};\frac{2+7}{2}\right)=(4{,}5;4{,}5)$ et $\frac{FG}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Un point $M(x\,;y)$ appartient à (C_2) si et seulement si $HM = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $HM^2 = 34/4 = 8{,}5$

$\Leftrightarrow$ $(x - 4{,}5)^2 + (y - 4{,}5)^2 = 8{,}5 \Leftrightarrow$ $x^2 - 9x + 20{,}25 + y^2 - 9y + 20{,}25 = 8{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 9x - 9y + 32 = 0$.

On en conclut que l'équation cartésienne de (C_2) est $x^2 + y^2 - 9x - 9y + 32 = 0$.

7. *On considère le cercle* (C_3) *dont l'équation cartésienne est* $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$.

Comme $x_F^2 + y_F^2 + 2\times x_F - 4\times y_F - 11 = 0$ $\Leftrightarrow$ $3^2 + 2^2 + 2\times 3 - 4\times 2 - 11 = 0$, on en conclut que le cercle (C_3) passe par F .

$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ et $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$, donc

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 11 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

En notant $\Omega(-1\,;2)$, on en conclut que (C_3) est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant

$$\Omega M^2 = 16 \Leftrightarrow \Omega M = 4,$$

c'est-à-dire le cercle de centre E et de rayon 4.