Méthodes relatives aux équations de droites

Déterminer une équation cartésienne de droite

❶ Droite (D) passant par un point A donné et de vecteur directeur $\vec{u}$

Introduction : *Un point $M(x\,;\,y)$* appartient à (D) si et seulement si $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$.
On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$, puis l'expression $f(x\,;\,y)$ de $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})$ à l'aide de x et y .
Conclusion : *Une équation cartésienne de (D) est $f(x\,;\,y) = 0$.*

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_1) passant par $A(-2\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$

Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à (D_1) si et seulement si $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$.
Or, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_A\,;\,y_M - y_A) = (x - (-2)\,;\,y - 1) = (x + 2\,;\,y - 1)$.
Donc, $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=\begin{vmatrix} x+2 & y-1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3\times(x+2)-1\times(y-1)=3x+6-y+1=3x-y+7$.
On en conclut qu'**une équation cartésienne de (D_1) est $3x - y + 7 = 0$** .

❷ Droite passant par deux points A et B

On applique la méthode ❶ en utilisant comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : On considère les points $A(-2\,;\,1)$ et $B(3\,;\,3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

(AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, donc un point $M(x\,;\,y)$ appartient à (AB) si et seulement si $dét(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})=0$.
Or, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A) = (3 - (-2)\,;\,3 - 1) = (5\,;\,2)$.
Donc, $dét(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix} x+2 & y-1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=2\times(x+2)-5\times(y-1)=2x+4-5y+5=2x-5y+9$.
On en conclut qu'**une équation cartésienne de (AB) est $2x - 5y + 9 = 0$** .

❸ Droite (D_2) parallèle à une droite (D_1) donnée et passant par le point A

On applique la méthode ❶ en utilisant un vecteur directeur de (D_1) et le point A .

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_2), parallèle à (D_1) passant par B .

(D_2) est la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$, donc un point $M(x\,;\,y)$ appartient à (D_2) si et seulement si $dét(\overrightarrow{BM}\,;\vec{u})=0$.
Or, $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_B\,;\,y_M - y_B) = (x - 3\,;\,y - 3)$.
Donc, $dét(\overrightarrow{BM}\,;\vec{u})=\begin{vmatrix} x-3 & y-3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3\times(x-3)-1\times(y-3)=3x-9-3y+3=3x-y-6$.
On en conclut qu'**une équation cartésienne de (D_2) est $3x - y - 6 = 0$** .

❹ Droite d'équation réduite connue

On transforme l'écriture de l'équation pour se ramener à une équation de la forme $ax + by + c = 0$

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) d'équation réduite $y = 0{,}8x + 3{,}6$.

L'équation $y = 0{,}8x + 3{,}6$ équivaut à $0{,}8x - y + 3{,}6 = 0$.
Donc, **une équation cartésienne de (D) est $0{,}8x - y + 3{,}6 = 0$.**

Déterminer l'équation réduite d'une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées)

❶ Droite (D) passant par un point A donné et de coefficient directeur m

On applique la formule $y = m(x - x_A) + y_A$ et on développe le membre de droite de cette équation.

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par $A(-5\,;\,3)$ et de coefficient directeur $m = 0{,}8$.

D'après la formule, l'équation réduite de (D) est :
$y = 0{,}8(x - (-5)) + 3 \iff y = 0{,}8(x + 5) + 3 \iff y = 0{,}8x + 4 + 3 \iff y = 0{,}8x + 7$.

❷ Droite passant par deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$)

On applique la méthode ❶ en utilisant la formule $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la droite (D_1) passant par $A(1 ; 3)$ et $B(2 ; -1)$

Le coefficient directeur de (D_1) est $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-3}{2-1}=-4$.

Ainsi, (D_1) est la droite passant par A et de coefficient directeur $m = -4$.

Son équation réduite est donc : $y = -4(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = -4x + 4 + 3 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = -4x + 7}$.

❸ Droite (D_2) parallèle à une droite (D_1) donnée et passant par le point A

On applique la méthode ❶ en utilisant le coefficient directeur de (D_1) et le point A .

Exemple : Déterminer une équation de la droite (D_2), parallèle à (D_1) passant par $C(0 ; 5)$

(D_2) étant parallèle à (D_1), elle a le même coefficient directeur que (D_1), c'est-à-dire $m = -4$.

Ainsi, (D_2) est la droite passant par C et de coefficient directeur $m = -4$.

Son équation réduite est donc : $y = -4(x - 0) + 5 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = -4x + 5}$.

❹ Droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$) connue

On transforme l'écriture de l'équation pour se ramener à une équation de la forme $y = mx + p$

Exemple : Soit (Δ) la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.Déterminer son équation réduite

L'équation $2x - 5y + 3 = 0$ équivaut à $5y = 2x + 3 \Leftrightarrow y = 0,4x + 0,6$.

Donc, **l'équation réduite de (Δ) est** $\mathbf{y = 0,4x + 0,6}$.

Déterminer un vecteur directeur d'une droite

Droite définie par deux points A et B donnés

Si (D) passe par A et B, on peut prendre $\vec{AB}$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{AB}$.

Exemple : *On considère les points* $A(1 ; 3)$ *et* $B(2 ; 1,8)$.

Déterminer un vecteur directeur de (AB) à coordonnées entières.

Un vecteur directeur de (AB) est le vecteur $\vec{AB}$ $(x_B - x_A ; y_B - y_A) = (2 - 1 ; 1,8 - 3) = (1 ; -1,2)$.

Pour obtenir un vecteur directeur à coordonnées entières, on peut choisir le vecteur

$$\mathbf{5\vec{AB}(5\times1;5\times1,2)=(5;-6)}$$

Droite (D) d'équation cartésienne connue

Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) de (D), on peut prendre le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : *On considère la droite* (D_1) *d'équation cartésienne* $x + 3y - 5 = 0$.

Déterminer le vecteur directeur de (D_1) d'ordonnée 5.

Par identification des coefficients, on peut dire qu'un vecteur directeur de (D_1) est $\vec{u}(-3;1)$.

Pour obtenir le vecteur directeur d'ordonnée 3, il suffit donc de considérer le vecteur

$$\mathbf{\vec{v}=3\vec{u}(3\times(-3);3\times1)=(-9;3)} .$$

Droite (D) définie par une condition de parallélisme

Si (D_2) est parallèle à une droite (D_1) de vecteur directeur $\vec{u}$, on peut prendre le vecteur $\vec{u}$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : Déterminer un vecteur directeur de (D_2), la parallèle à (D_1) passant par A.

Comme (D_2) est parallèle à (D_1), tout vecteur directeur de (D_1) est un vecteur directeur de (D_2).

Donc, $\mathbf{\vec{u}(-3;1)}$ **est un vecteur directeur de (D_2).**

Droite (D) d'équation réduite connue

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), on peut prendre le vecteur $\vec{u}(1;m)$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : Déterminer un vecteur directeur à coordonnées entières de la droite (Δ) d'équation réduite $y = 0,8x + 2$.

Par identification des coefficients, on peut dire qu'un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(1;0,8)$.

Pour obtenir un vecteur directeur à coordonnées entières, il suffit donc de considérer le vecteur

$$\mathbf{\vec{v}=5\vec{u}(5\times1;5\times(-0,8))=(1;-4)} .$$

Déterminer le coefficient directeur d'une droite

Droite (D) parallèle à l'axe des abscisses

Dans ce cas, son coefficient directeur est nul.

Droite (D) d'équation réduite connue

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), son coefficient directeur est m que l'on obtient par simple identification.

Exemple : Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_1) d'équation réduite $y = -10x + 56$.
Par identification des coefficients, **le coefficient directeur de (D_1) est $m = -10$** .

Droite (D) d'équation cartésienne connue

Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $b \neq 0$) de (D), on trouve son équation réduite et on applique la méthode précédente.

Exemple : Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_2) d'équation $x + 3y - 5 = 0$.

L'équation $x + 3y - 5 = 0$ équivaut à $3y = -x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Donc, **le coefficient directeur de (D_2) est $m = -\frac{1}{3}$** .

Droite passant par deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$)

On calcule m en utilisant la formule $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple : *On considère les points* $A(10 ; 5)$ *et* $B(45 ; 12)$.
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

Le coefficient directeur de (AB) est $\mathbf{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12-5}{45-10} = \frac{7}{35} = \mathbf{0{,}2}$

Droites parallèles aux axes du repère

Si (D)	Une équation cartésienne est	un vecteur directeur est	son coefficient directeur vaut	passe par $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$
est parallèle à l'axe des abscisses	$y - k = 0$	tout vecteur colinéaire à $\vec{u}(1;0)$	$m = 0$	avec $y_A = y_B = k$
est parallèle à l'axe des ordonnées	$x - k = 0$	tout vecteur colinéaire à $\vec{u}(0;1)$	*non défini*	avec $x_A = x_B = k$

Exemples :
On considère les points $E(-3 ; 5)$, $F(-3 ; 8)$ *et* $G(2 ; 8)$.
Déterminer une équation de chacune des droites (EF) et (FG)

• Comme $x_E = x_F = -3$, la droite **(EF) est parallèle à l'axe des ordonnées** et son équation est
$$x = -3 \Leftrightarrow x + 3 = 0.$$
• Comme $y_F = y_G = 8$, la droite **(FG) est parallèle à l'axe des abscisses** et son équation est
$$y = 8 \Leftrightarrow y - 8 = 0.$$

Déterminer une équation de la droite (D_1), parallèle à l'axe des abscisses passant par E.
Comme (D_1) est parallèle à l'axe des abscisses, **elle a une équation de la forme $y = k$.**
Comme **elle passe par E(-3 ; 5)**, son équation est donc **$y = 5$** .

Déterminer une équation de la droite (D_2), parallèle à l'axe des ordonnées passant par G.
Comme (D_2) est parallèle à l'axe des ordonnées, **elle a une équation de la forme $x = k$.**
Comme **elle passe par G(2** ; 8), son équation est donc **$x = 2$** .

Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_3) passant par $I(2 ; -1)$ et $J(10 ; -1)$
Comme $y_I = y_J = -1$, la droite **(D_3) est parallèle à l'axe des abscisses** et **son coefficient directeur est égal à 0**.

Vérifier qu'un point $A(x_A ; y_A)$ appartient à une droite

Droite (D) d'équation réduite connue
Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), on calcule $m \times x_A + p$ et on le compare à y_A.
Si $y_A = m \times x_A + p$, alors A appartient à (D). Sinon, il n'appartient pas à (D).

Exemple : Indiquer si chacun des points $E(3 ; 3,5)$ et $F(4 ; 3)$ appartient à la droite (D_1) d'équation réduite $y = -0,6x + 5,4$.
• Comme $-0,6 \times x_E + 5,4 = -0,6 \times 3 + 5,4 = 3,6 \neq y_E$, **le point E n'appartient pas à (D_1)**.
• Comme $-0,6 \times x_F + 5,4 = -0,6 \times 4 + 5,4 = 3 \neq y_F$, **le point F appartient à (D_1)**.

Droite (D) d'équation cartésienne connue
Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) de (D), on calcule $a \times x_A + b \times y_A + c$.
Si le résultat est égal à 0, alors A appartient à (D). Sinon, il n'appartient pas à (D).

Exemple : Indiquer si chacun des points $G(115 ; 186)$ et $H(96 ; 155)$ appartient à la droite (D_2) d'équation réduite $5x - 3y - 17 = 0$.
• Comme $5 \times 115 - 3 \times 186 - 17 = 0$, **le point G appartient à (D_2)** .
• Comme $5 \times 96 - 3 \times 155 - 17 = -2 \neq 0$, **le point H n'appartient pas à (D_2)** .

Vérifier si deux droites (D) et (D') sont parallèles ou sécantes

Si l'on connaît leurs coefficients directeurs respectifs
Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D) et l'équation réduite $y = m'x + p'$ de (D'), il suffit de comparer les valeurs de m et de m' .
Si $m = m'$, alors (D) et (D') sont parallèles. Sion elles sont sécantes .

Exemple : *On considère les points* $A(-5 ; 1)$ et $B(-4 ; 4)$ *, ainsi que la droite* (D) *d'équation réduite* $y = 3x + 10$
Justifier que les droites (D) et (AB) sont parallèles.

Le **coefficient directeur de (AB) est** $\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{-4-(-5)} = 3}$

Par identification des coefficients, on peut dire que **le coefficient directeur de (D) est $m' = 3$**.
Comme (AB) et (D) ont le **même coefficient directeur**, les droites **(D) et (AB) sont parallèles**.

Si l'on connaît un vecteur directeur de chacune de ces droites
Si (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et (D') a pour vecteur directeur $\vec{u}'$, on vérifie si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, alors (D) et (D') sont parallèles. Sinon elles sont sécantes .

Exemple : *On considère les points* $E(1,2 ; 2,8)$ et $F(4,7 ; 4,2)$ *, ainsi que la droite* (Δ) *d'équation cartésienne* $2x - 5y - 10 = 0$.
Les droites (Δ) et (EF) sont-elles parallèles ?
• Un vecteur directeur de (EF) est le vecteur
$$\overrightarrow{EF} \quad (x_F - x_E ; y_F - y_E) = (4,7 - 1,2 ; 4,2 - 2,8) = \mathbf{(3,5 ; 1,4)}.$$
• Par identification des coefficients, on peut dire qu'un vecteur directeur de (Δ) est
$$\vec{u}(-(-5) ; 2) = \mathbf{(5 ; 2)} \; .$$
• Comme $dét(\overrightarrow{EF} ; \vec{u}) = \begin{vmatrix} 3,5 & 1,4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3,5 \times 2 - 5 \times 1,4 = 0$, on en conclut que **les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires** et, par suite, que **les droites (Δ) et (EF) sont parallèles .**