Correction de l'exercice 4

EXERCICE 4

1. **a)** La fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = u(x) + v(x) \times w(x)$; où les fonctions u , v et w sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 6x - x^2$, $v(x) = 1 - x$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ respectivement . Comme chacune de ces fonctions est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f .
De plus , pour tout réel x , on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x) \times w(x) + w'(x) \times v(x)$.
Comme $u'(x) = 6 - 2 \times 2x = 6 - 4x$, $v'(x) = -1$ et $w'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$, on obtient , pour tout x : $f'(x) = 6 - 4x + (-1) \times \mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}(1-x) \Leftrightarrow f'(x) = 6 - 4x - \mathrm{e}^{-2x} - 2(1-x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow f'(x) = 2(3-2x) + \mathrm{e}^{-2x}(-1-2+2x) = 2(3-2x) - (3-2x)\mathrm{e}^{-2x} = (3-2x)(2-\mathrm{e}^{-2x})$.
Comme $\mathrm{e}^{-2x}(2\mathrm{e}^{2x} - 1) = 2\mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} = 2 - -\mathrm{e}^{-2x}$, on en conclut que $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(3-2x)(2\mathrm{e}^{2x} - 1)$.

b) Étudier le sens de variation de f revient à déterminer le signe de $f'(x)$.
Comme $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(3-2x)(2\mathrm{e}^{2x} - 1)$, pour tout réel x et que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(3-2x)(2\mathrm{e}^{2x} - 1)$. Comme

- $2\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x} > 1 \leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- $2\mathrm{e}^{2x} - 1 < 0 \leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x} < 1 \leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2} \times \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $2\mathrm{e}^{2x}-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en conclut que f est :

- décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ et $\left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$;
- croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right); \dfrac{3}{2}\right]$.

2. **a)** Résoudre l'équation $f(x) = 6 - 2x^2$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{P}$ et $(\mathscr{C})$.
Par lecture graphique , on obtient ainsi que les solutions de l'équation $f(x) = 6 - 2x^2$ sont -1,8 et 1 .

b) $f(x) = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow 6x - 2x^2 + (1-x)\mathrm{e}^{-2x} = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow 6x - 6 + (1-x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow -6(1-x) + (1-x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow (1-x)(\mathrm{e}^{-2x} - 6) = 0$.
Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , on en déduit que l'équation $f(x) = 6 - 2x^2$ est équivalente à $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\mathrm{e}^{-2x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x} = 6 \Leftrightarrow -2x = \ln 6 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}\ln 6$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 6 - 2x^2$ est $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\ln 6; 1\right\}$.