Soutien , séance 1 : Dérivation

Point de vue graphique

Graphiquement $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de ***f*** au point d'abscisse ***a***
On peut aussi retenir que si $f'(x)=0$ en un nombre *a*, on aura une tangente horizontale au point d'abscisse *a*
Et on peut aussi se servir de la formule suivante pour trouver une équation de tangente au point d'abscisse *a* : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

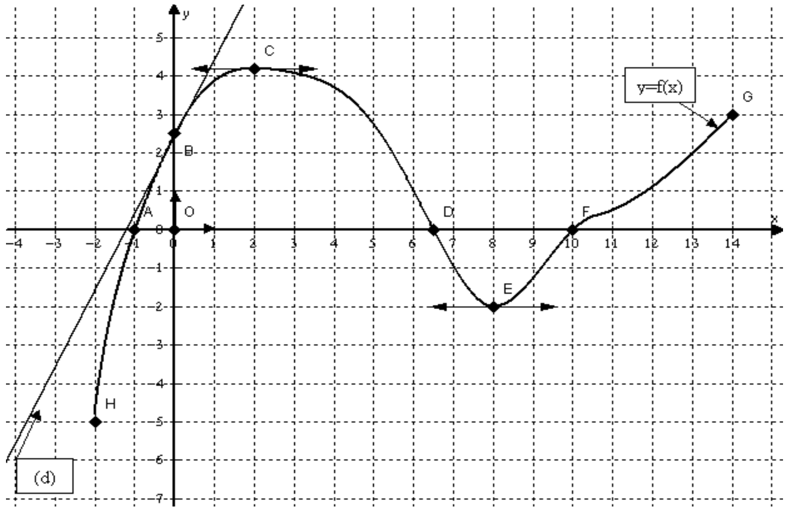
Exemples :

On considère la fonction dérivable f représentée par sa courbe C_f sur la figure ci-dessus. le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$
Les points $A(-1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2{,}5)$, $C(2\ ;\ 4{,}2)$, $D(6{,}5\ ;\ 0)$, $E(8\ ;\ -2)$, $F(10\ ;\ 0)$, $G(14;3)$ et $H(-2;-5)$ sont des points de C_f

La droite *(d)* est tangente à C_f en *B*

Donner :

a) $f(0)$
b) $f'(0)$
c) Les solutions de $f(x)=0$
d) Les solutions de $f'(x)=0$
f) Les solutions de $f(x)\geq 0$
g) Les solutions de $f'(x)\geq 0$



Point de vue algébrique

***f* est croissante sur un intervalle *I* si et seulement si** $f'(x)\geq 0$ **pour tout** $x\in I$
***f* est décroissante sur un intervalle *I* si et seulement si** $f'(x)\leq 0$ **pour tout** $x\in I$

L'utilisation principale de la dérivée est d'étudier les variations d'une fonction :

On veut étudier les variations de *f* → On calcule la dérivée *f '*
↓
On en déduit le sens de variation de *f* ← On étudie le signe de *f '*

Pour cela on a besoin de savoir calculer l'expression des fonctions dérivées. Pour cela il faut connaître deux tableaux de formules : L'un donne les dérivées des fonctions usuelles, l'autre donne des formule permettant de dériver des sommes, produits, quotients, composées... de ces dérivées

Dérivées des fonctions usuelles :

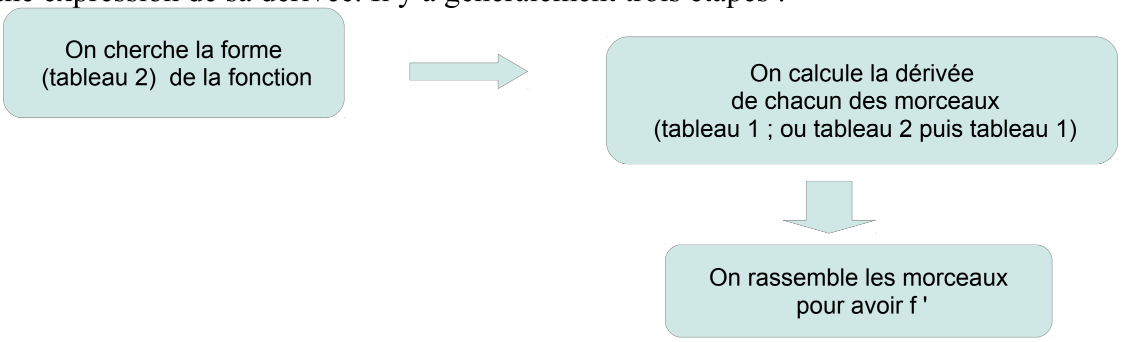
f définie par	f' définie par
$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$ (n entier $\geqslant 2$)	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$

Opérations sur les dérivées

$f=ku$	$f'=ku'$
$f=u+v$	$f'=u'+v'$
$f=uv$	$f'=u'v+uv'$
$f=\frac{1}{u}$	$f'=-\frac{u'}{u^2}$
$f=\frac{u}{v}$	$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f=\sqrt{u}$	$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f=u^n$	$f'=n\times u^{n-1}\times u'$
$f=e^u$	$f'=u'\times e^u$
$f=v\circ u$	$f'=u'\times v'\circ u$

Exemple : Si on veut connaître les variations de *f* définie par $f(x)=\frac{e^{2x}}{3x^2-1}$

On calcule une expression de sa dérivée. Il y a généralement trois étapes :



__Première étape__ : Ici : $f=\frac{u}{v}$ avec $u(x)=e^{2x}$ et $v(x)=3x^2-1$

__Deuxième étape__ : $v(x)=3\times x^2-1$ donc $v'(x)=3\times 2x-0=6x$ (Suffisamment simple pour qu'on ne justifie pas, mais si on voulait tout détailler : « car la dérivée de (*u*-*v*) est *u'*-*v'* et la dérivée de 3*u* est 3 *u*' (lignes 1 et 2 du second tableau) et la dérivée de *f*(*x*)=*x*² est *f* '(*x*)=2*x* et celle de *f*(*x*)=-1 est *f* '(*x*)=0 d'après le premier tableau»)

Pour *u* c'est un peu plus compliqué, il faut reconnaître que $u=e^w$ avec *w*(*x*)=2*x* donc *w*'(*x*)=2 (tableau 1) et donc $u'=w'\times e^w$ (tableau 2) soit $w'(x)=2e^{2x}$

__Troisième étape__ : Le tableau 2 nous informe que $f'=(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ et donc en remplaçant :

$f'(x)=\frac{2e^{2x}\times(3x^2-1)-6x\times e^{2x}}{(3x^2-1)^2}=\frac{e^{2x}\times(6x^2-2-6x)}{(3x^2-1)^2}$ dont on peut facilement étudier le signe : l'exponentielle est toujours positive, le carré du dénominateur aussi et il reste un trinôme au numérateur, dont on sait étudier le signe (prochaine séance de soutien).On en déduit ensuite les variations de *f*.

EXERCICE 1

1. *On considère une fonction f définie sur l'intervalle* [0 ; 4].

Sa représentation graphique est la courbe (C) .

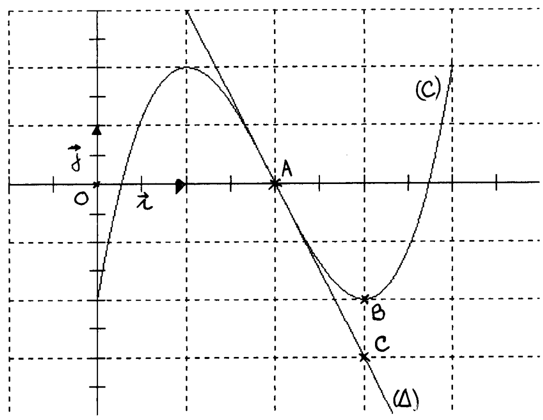
Elle passe par les points A (2 ; 0) et B (3 ; -2).

La tangente à (C) en A est la droite (Δ) dont l'équation réduite est : y = -3x + 6 .

La tangente à (C) en B est parallèle à l'axe des abscisses .

Déterminer la valeur de chacun des nombres :

$f'(2)$ et $f'(3)$.



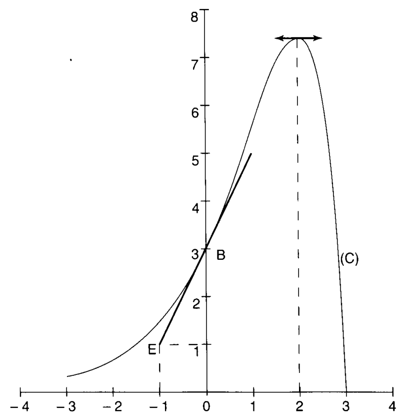
2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal* $(O;i;j)$

On note f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-3 ; 3] *et représentée , ci-dessous par la courbe (C).*

On précise que :

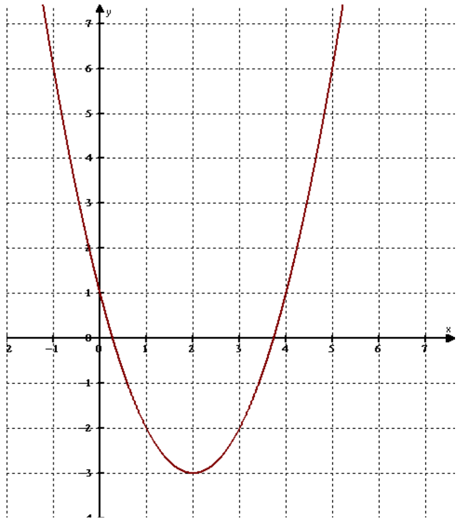
- *le point B(0 ; 3) est situé sur la courbe (C) ;*
- *la tangente à la courbe (C) en son point B passe par le point E(-1 ; 1) ;*
- *la tangente à la courbe (C) en son point 2 est parallèle à l'axe des abscisses .*

Préciser les valeurs de $f'(2)$ et $f'(0)$.



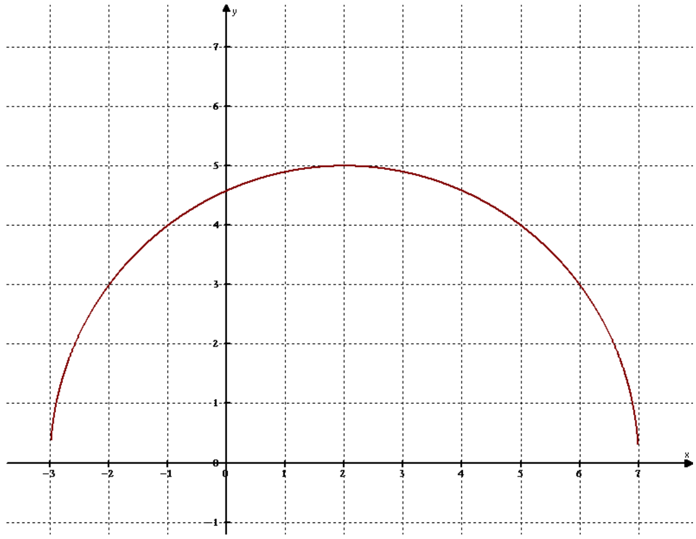
EXERCICE 2

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal .
On note A le point de (C) d'abscisse 3



Déterminer l'équation réduite de (D-1) , la tangente à (*C*) au point *A* et la tracer .

2. *La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle* [-3 ; 7] *par :* $f(x)=\sqrt{21+4x-x^2}$.



Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ *est le demi-cercle de centre* ***Ω*** (2 ; 0) *et de rayon 5 .*

1. *On note A le point de la courbe (Γ) d'abscisse 6 .*
Calculer l'équation réduite de (T_6) , la tangente à (*Γ*) en *A* et la tracer .

EXERCICE 3

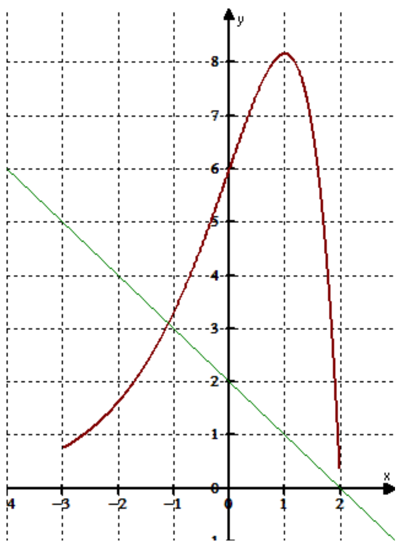
Dans chacun des cas suivants , déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de f

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 7x - 1$ d) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x-3$

e) $f(x) = (2x^2 - 1)^3$ f) $f(x)=\frac{5x+1}{2x+5}$ g) $f(x)=\frac{4x^2-3}{3-x^2}$ h) $f(x)=2x^3+3x+5e^x$

i) $f(x)=e^{x^2}$ j) $f(x)=3e^{2x+3}$ k) $f(x)=\frac{2e^x+3}{3e^x+1}$ l) $f(x)=x^2(5-2e^x)$

EXERCICE 4



On note f *la fonction définie sur* [-3 ; 2] *par :* $f(x) = (6 - 3x)\,e^x$.
1.a) Montrer que $f'(x) = 3\,(1 - x)\,e^x$.
Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$.
b) Dresser le tableau de variation de f sur [-3 ; 2] .
2. *On a tracé dans le même repère orthogonal* $(O;\vec{i};\vec{j})$,
(𝒞) *, la courbe représentative de la fonction f*
et la droite (D) d'équation $y = -x + 2$.
Utiliser le graphique pour donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = -x + 2$.
3.a) Montrer que , pour tout réel x : $f(x) - (-x + 2) = (-x + 2)\,(3\,e^x - 1)$.
b) En déduire la valeur exacte des solutions de l'équation $f(x) = -x + 2$.

Corrections : II.2. $f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=21+4x-x^2$ dont la dérivée est $u'(x)=0-4\times1-2\times x=4-2x$ en utilisant le tableau de gauche et les formules (k.u)'=k.u' ; (u+v)'=u'+v' et (u-v)'=u'-v'

Donc $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{4-2x}{2(21+4x-x^2)}$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en x=6 est f '(6)=-4 over 9, son équation est donc de la forme $y=\frac{-4}{9}x+p$

Et on trouve p en utilisant les coordonnées d'un point de la droite, le point A d'abscisse 6 et d'ordonnée f(6) (puisqu'il est sur le courbe de f) or f(6)=3 donc $3=\frac{-4}{9}\times6+p$ donc $p=3+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$ et donc l'équation cherchée est $y=\frac{-4}{9}x+\frac{17}{3}$

III-

a) $f(x) = 5$ $f'(x)=0$ b) $f(x) = 3x$ $f'(x)=3$ c) $f(x) = 7x-1$ $f'(x)=7$ d) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x-3$ $f'(x)=\frac{1}{2}\times3x^2+1-0=1{,}5x^2+1$

e- $f=u^3$ avec $u(x)=2x^2-1$ donc $u'(x)=2\times2x-0=4x$ et $f'=3u^2\times u'$ donc $f'(x)=3(4x)(2x^2-1)^2=12x(2x^2-1)^2$

f- $f=\frac{u}{v}$ avec u(x)=5 x+1 et v(x)=2x+5 donc $f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ soit $f'(x)=\frac{5(2x+5)-2(5x+1)}{(2x+5)^2}=\frac{23}{(2x+5)^2}$

g- On utilise la même formule et on obtient $f'=\frac{8x(3-x^2)-(-2x)(4x^2-3)}{(3-x^2)^2}=\frac{18x}{(3-x^2)^2}$ car les x^3 se simplifient

h- C'est une somme avec des fonctions simples, on peut appliquer directement les formules: $f'(x)=2\times3x^2+3\times1+5\times e^x=6x^2+3+5e^x$

i- $f=e^u$ avec $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$ et donc $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}=2xe^{x^2}$

j- $f=3e^u$ avec u(x)=2 x+3 donc u'(x)=2 et $f'=3(e^u)'=3u'e^u$ soit $f'(x)=6e^{2x+3}$

k- $f=\frac{u}{v}$ ave $c\,u(x)=2e^x+3$ donc $u'(x)=2e^x$ et $v(x)=3e^x+1$ donc $v'(x)=3e^x$ et $f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ donc $f'(x)=\frac{2e^x(3e^x+1)-3e^x(2e^x+3)}{(3e^x+1)^2}=\frac{-7e^x}{(3e^x+1)^2}$ car les $6e^{2x}$ se simplifient

l- $f=u\times v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=5-2e^x$ donc $u'(x)=2x$ et $v'(x)=0-2e^x=-2e^x$ et $f'=u'v+v'u$ soit $f'(x)=2x(5-2e^x)+(-2e^x)x^2=10x-4xe^x-2x^2e^x$

IV- 1-a $f(x) = (6 - 3x)\,e^x$ de la forme $u\times v$ avec u(x)=6-3 x et $v(x)=e^x$ donc $v'(x)=e^x$ et u'(x)=-3
On en déduit $f'=u'v+v'u$ soit $f'(x)=-3e^x+e^x(6-3x)=3e^x-3xe^x=3e^x(1-x)$ or e^x est toujours stricetment positif, et 3 aussi, donc f' est du signe de 1-x

b- $f'(x)$ est donc positif pour tout x<1 et négatif pour tout x>1 donc f est croissante sur [-3;1] puis décroissante sur [1;2] (On trace le tableau des variations en précisant les valeurs en x=-3 ; x=1 et x=2)

2- Les solutions semblent être -1,1 et 2

3-a $f(x)-(-x+2)=(6-3x)e^x-(-x+2)=6e^x-3xe^x+x-2$

Et si on développe : $(-x+2)(3e^x-1)=-3xe^x+6e^x+x-2=f(x)-(-x+2)$.

b-

$$f(x)=-x+2\Leftrightarrow f(x)-(-x+2)=0\Leftrightarrow(-x+2)(3e^x-1)=0\Leftrightarrow x=2\,ou\,3e^x=1\Leftrightarrow x=2\,ou\,e^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=2\,ou\,x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

En utilisant la factorisation du 3-a et une équation produit. On retrouve bien 2 et environ -1,1.