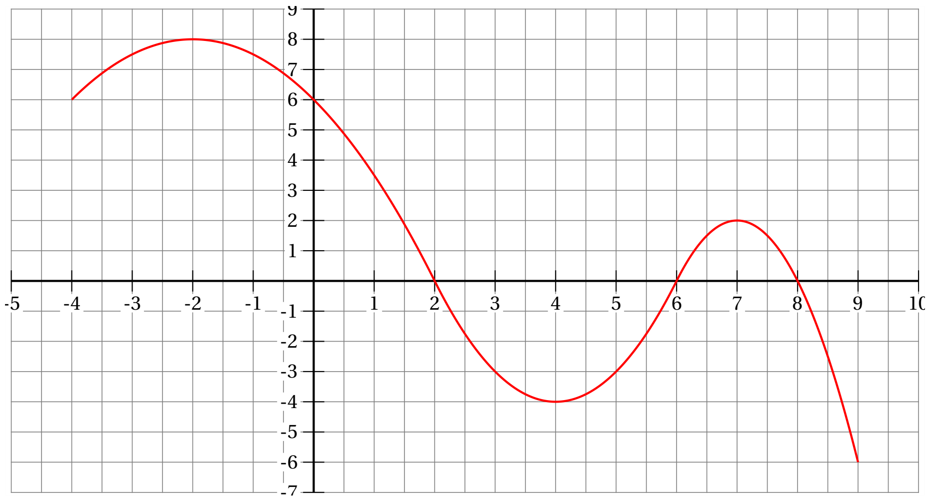
Devoir commun de Mathématiques

Durée : 2 heures

Nom : .... Prénom : ....

EXERCICE 1 **(4 points)**

La courbe $(\mathscr{C})$indiquée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f .



Par lecture graphique , répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction .
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Valeurs de x	-4	3	5	8	$\cdots$
Valeurs de $f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	8

3. Résoudre l'équation $f(x) = -2$.
4. Résoudre les inéquations $f(x) \geqslant 6$ et $f(x) \leqslant -3$.
5. Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4\,;\,9]$.
7. Préciser le maximum et le minimum de f sur $[-4\,;\,9]$.

EXERCICE 2 **(3 points)**

Les élèves doivent, selon leur goût et les chapitres déjà vus cette année, choisir **4 questions** parmi les 8 proposées et y répondre.
Á chaque question une seule réponse est possible . Une réponse correcte rapporte 0,75 points ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapportent ni ne coûtent de points.
L'élève recopiera sur sa copie le numéro des quatre questions traitées et la réponse proposée pour chacune d'entre elles.

1. Si $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{BC}$, alors ...

   a) $AB = -3BC$; **b)** A , B et C sont alignés ; **c)** B est le milieu du segment $[AC]$.

2. Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$, alors ...

   a) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$; **b)** $\overrightarrow{AB} = 1,25\overrightarrow{AC}$; **c)** $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$.

3. La droite $(\mathscr{D})$ d'équation réduite $y = 1,5x + 2$ passe par le point ...

   a) $A(1,5\,;\,2)$; **b)** $B(2\,;\,5)$; **c)** $C(-3\,;\,-2)$.

4. On considère les points $A(3\,;\,1)$ et $B(6\,;\,0)$. Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

   a) 3 ; **b)** -3 ; **c)** $-\dfrac{1}{3}$.

5. On a relevé le nombre de fautes d'hortograf dans un paquet de 25 copies de BAC . Voici les résultats :

Nombre de fautes	0	2	3	4	5	1 0	14	20
Effectifs	1	2	2	4	8	5	2	1

Le premier quartile de cette série série est ....

a) 4 ; **b)** 7 ; **c)** 2 .

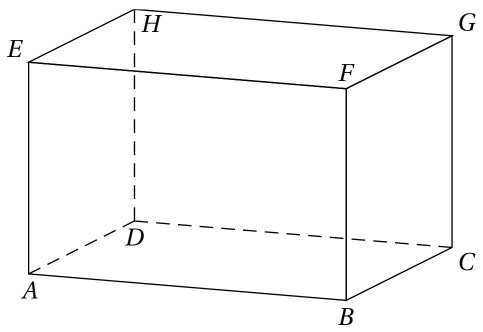
6. La moyenne de cette série (arrondie au dixième) est

a) 7,3 ; **b)** 4,5 ; **c)** 6,6 .

7. Une petite entreprise comporte 36 hommes et 24 femmes .
Un tiers des hommes est célibataire . Parmi les femmes , 15 sont mariées .
Le comptable choisit une fiche au hasard dans le fichier du personnel .
La probabilité pour que ce soit celle d'une personne célibataire est ...

a) $\frac{7}{20}$; **b)** $\frac{3}{20}$; **c)** $\frac{1}{3}$.

8. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.



Les plans (ADH) et (EGB) ...

a) ... sont sécants selon la droite (ED) ;

b) ... sont sécants selon la droite parallèle à (AH) passant par E ;

c) ... ne sont pas sécants. .

EXERCICE 3 **(6 points)**

1. Dans le repère orthonormé (O, I, J) donné en dernière page, placer les points A , B et C de coordonnées

$A\ (-3\ ;\ 2)$, $B\ (3,5\ ;\ 7,5)$ et $C\ (4\ ;\ -1)$, puis un représentant du vecteur $\vec{v}(-11\ ;\ -9)$

2. Placer le point K milieu du segment $[AC]$ et calculer ses coordonnées.

3. a) Calculer la distance AB .

b) On admet , pour la suite , que $AK = \sqrt{14,5}$ et $BK = \sqrt{58}$.
Justifier que le triangle BAK est rectangle en K .

4. Que représente alors la droite (BK) pour le triangle ABC ? Que peut-on en déduire quant à la nature du triangle ABC ?

5. a) Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = \vec{v} + \overrightarrow{AC}$ ($\vec{v}$ étant le vecteur défini en début d'exercice) .

b) Justifier précisément pourquoi $ABCD$ est un trapèze .

c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ et en déduire celles de D .

d) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BE}$ et en déduire celles de E .
Si on n'y parvient pas, se contenter d'une lecture graphique pour faire la question suivante .

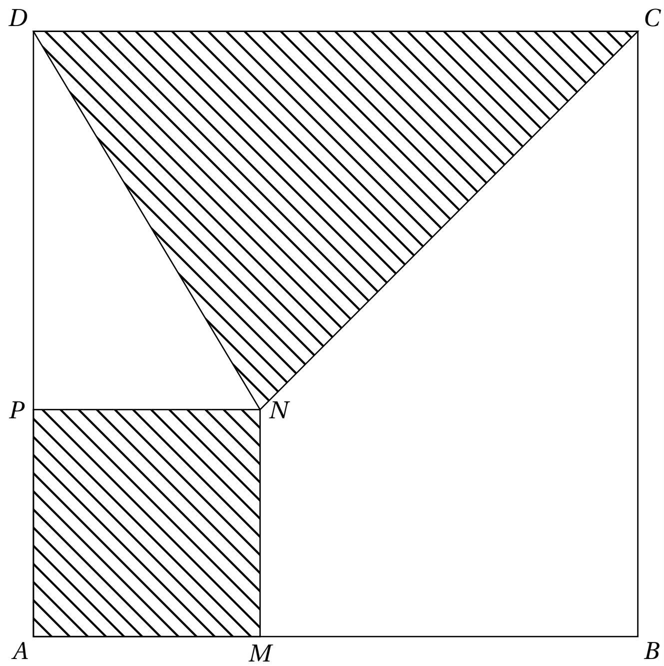
6. On veut montrer que les points B , $I(1\ ;\ 0)$ et E sont alignés.
Proposer deux méthodes (avec précision) pour le prouver, et en rédiger une (avec les calculs nécessaires)

EXERCICE 4 **(7,5 points)**

On considère un carré $ABCD$ de côté 20 cm .

- M est un point du segment $[AB]$;
- P appartient au segment $[AD]$;
- $AMNP$ est un carré.

On note :
- $x = AM$;
- $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$;
- $g(x)$ celle du triangle CDN .



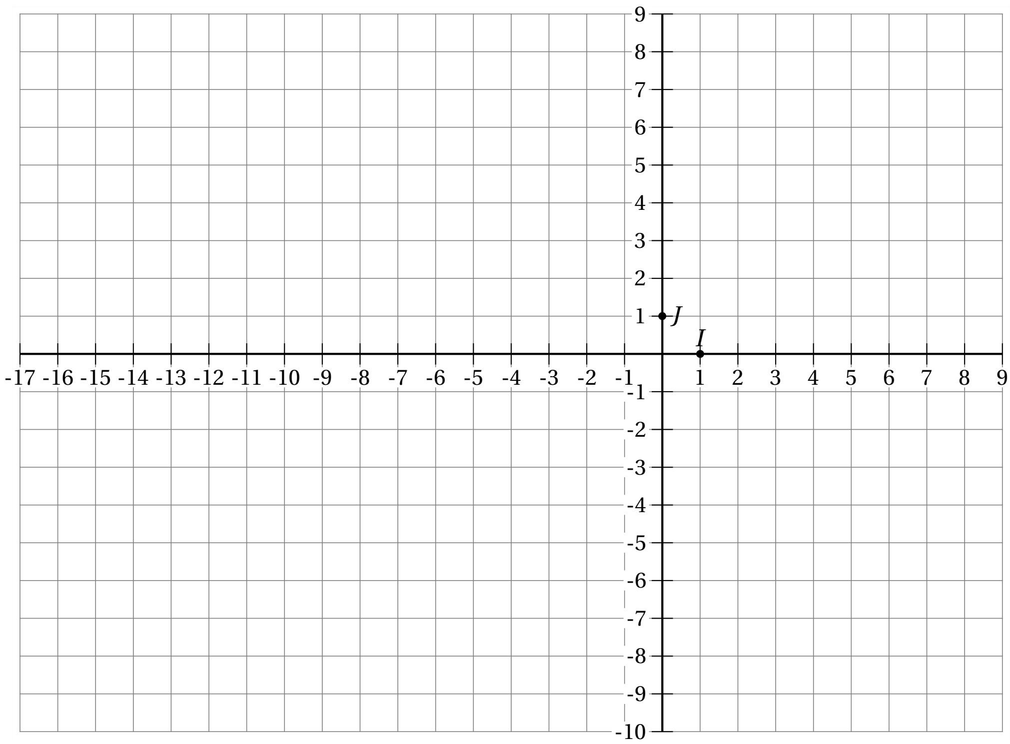
Partie A : Recherche de point(s) M tel(s) que l'aire de $AMNP$ et celle de CDN soient égales

1. **Étude d'un exemple**
   On suppose ici que $x = AM = 5$. Calculer l'aire $f(5)$ de $AMNP$ et celle, $g(5)$, de CDN
2. **Cas général**
   Justifier que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = -10x + 200$.
3. **Lectures graphiques**
   a) Tracer sur le graphique donné en dernière page les courbes des fonctions f et g .
   b) En déduire, par lecture graphique les point(s) M tel(s) que l'aire de $AMNP$ et celle de CDN soient égales.
4. **Démonstration**
   a) Développer $(x+5)^2 - 15^2$.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $(x+5)^2 - 15^2 = 0$.
   c) Résoudre l'équation $(x+5)^2 - 15^2 = 0$ et en déduire le(s) solution(s) du problème.
   Indication : On pourra factoriser l'expression $(x+5)^2 - 15^2$.

Partie B : Etude de la somme des deux aires

1. On appelle h la fonction égale à la somme des aires de $AMNP$ et CDN .
   Vérifier que $h(x) = x^2 - 10x + 200$.
2. On veut savoir pour quelles valeurs de x la somme des aires est inférieure à 211cm^2 .
   a) **Méthode graphique** . À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction h sur $[0\ ;\ 20]$ et en déduire de manière approchée pour quelles valeurs de x l'aire est inférieur à 211cm^2 .
   b) **Par le calcul** . Montrer que l'inéquation $h(x) \leqslant 211$ est équivalente à l'inéquation $(x-11)(x+1) \leqslant 0$ et résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ à l'aide d'un tableau de signe.
3. On cherche maintenant quel est le minimum de la fonction h.
   Par une méthode de son choix , déterminer quel est ce minimum et pour quelle valeur de x il est atteint.
   Indication : On pourra établir que , pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $h(x) = (x-5)^2 + 175$.

EXERCICE 3



EXERCICE 4