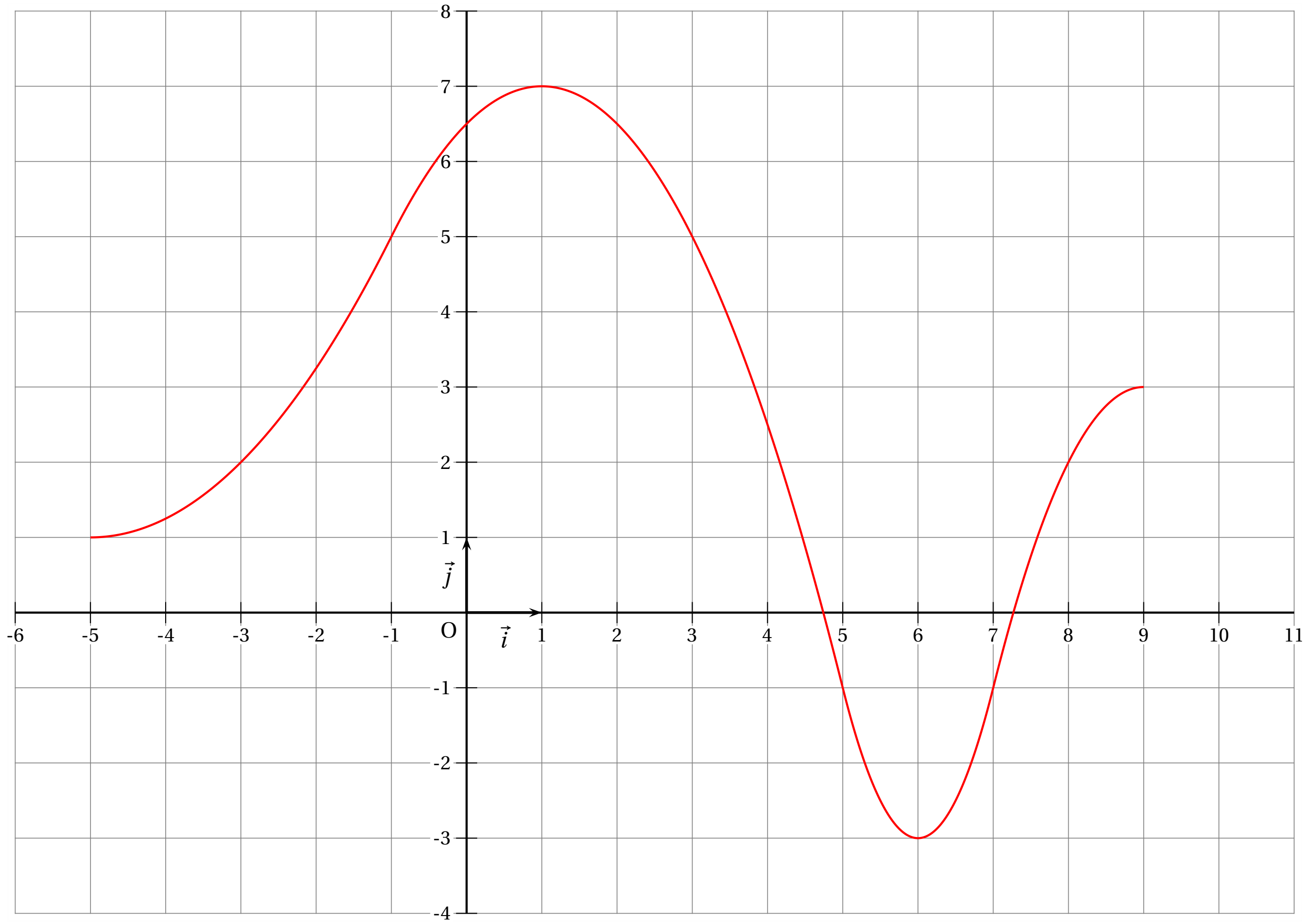
Devoir commun de Mathématiques

Classes de Seconde

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

La courbe ($\mathscr{C}$)indiquée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5\,;\,9]$.



1. Par lecture graphique , répondre aux questions suivantes :

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Valeurs de x	-5	-2	3	5	$\cdots$
Valeurs de $f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	7

b) Résoudre les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = 8$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 5$.

d) Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

e) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5\,;\,9]$.

f) Préciser le maximum et le minimum de f sur $[-5\,;\,9]$.

2. g est une fonction affine telle que $g(1) = 5$ et $g(4) = -1$.

a) Tracer la représentation graphique de g dans le même repère que celle de f .

b) Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x .

3. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{11}{3}$.

a) Tracer la représentation graphique de h dans le même repère que celles de f et de g .

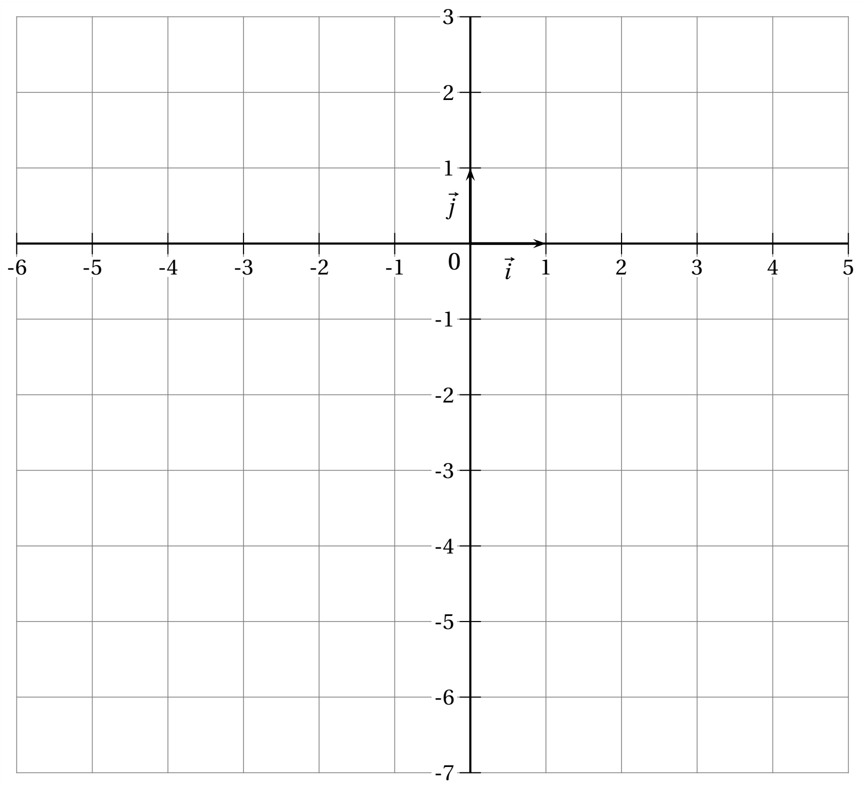
b) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = h(x)$, puis par le calcul .

EXERCICE 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 1 cm), on donne les points A , B et C tels que

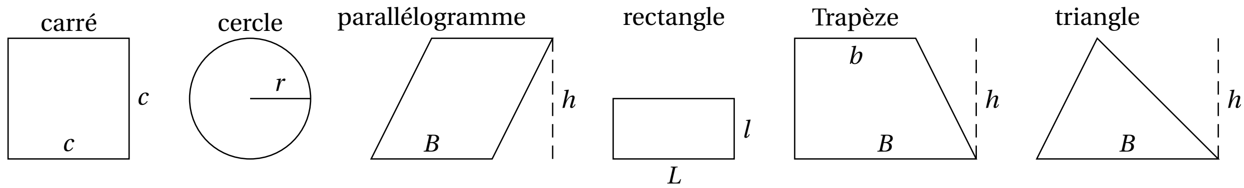
$$A(-4\ ;\ -1)\ ,\ B(-3\ ;\ 2)\ \text{ et }\ C(2\ ;\ -3)\ .$$

1. Faire une figure que l'on complètera au fil des questions.



2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB en centimètres (cm).
   On admet pour la suite de l'exercice que $AC = 2\sqrt{10}$ et $BC = 5\sqrt{2}$
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle .
4. **a)** Déterminer les coordonnées du point K , milieu de $[BC]$.
   b) Montrer que le point $G\left(-\dfrac{5}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right)$ est aligné avec A et K .
   c) Par une méthode de votre choix , montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC .
5. Déterminer , par le calcul , les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme , puis le placer sur la figure .
6. On considère le point E de coordonnées $\left(2\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.
   a) Démontrer qu'il existe un réel k $(0 < k < 1)$ tel que $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $BECA$?
   b) Le quadrilère $BECA$ est-il un parallélogramme ? Justifier la réponse .
7. Calculer la distance BE , puis l'aire , au mm^2 près par excès , du quadrilatère $BECA$.

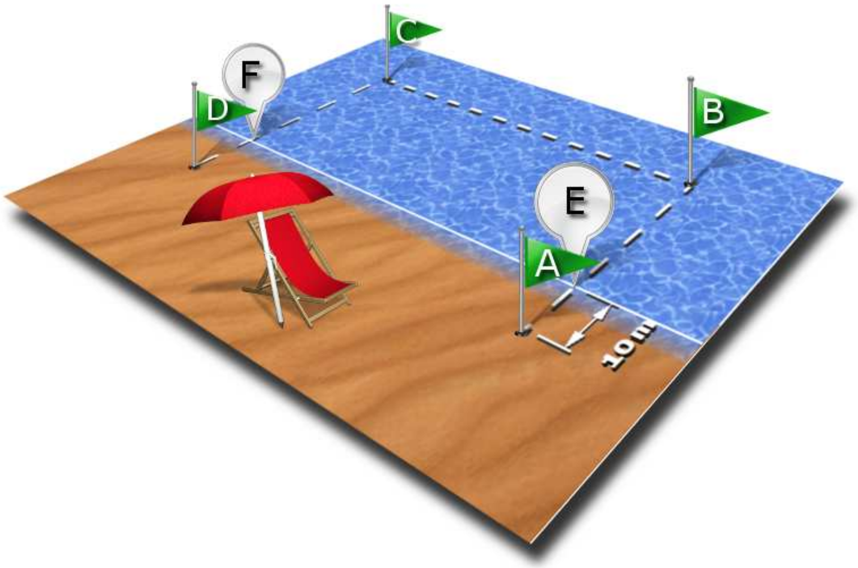
Formulaire de géométrie



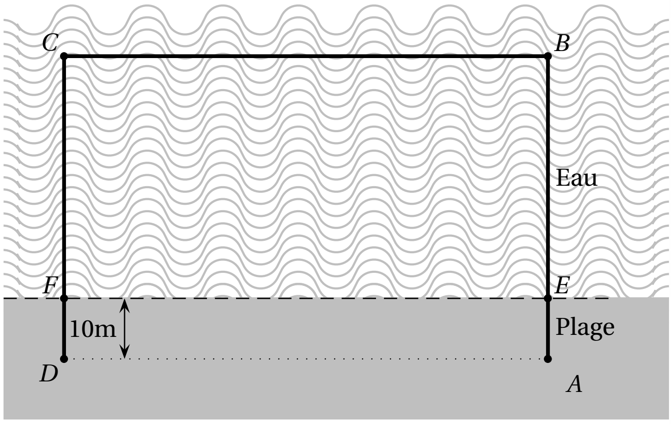
$\mathscr{A} = c^2$ | $\mathscr{A} = \pi \times r^2$, périmètre $= 2\pi r$ | $\mathscr{A} = B \times h$ | $\mathscr{A} = L \times l$ | $\mathscr{A} = \dfrac{B+b}{2} \times h$ | $\mathscr{A} = \dfrac{B \times h}{2}$

EXERCICE 3

En bord de mer, un plagiste est chargé d'organiser une zone de baignade surveillée par un maître-nageur. Il dispose d'un cordon flottant de 180 mètres .
Il décide donc de délimiter une aire rectangulaire dont un côté est matérialisé par la plage ($[EF]$) et les trois autres par le cordon ($[EB]$; $[BC]$ et $[FC]$) , sachant que le cordon doit être amarré aux deux extrémités 10 m avant la rive (points A et D). (Voir schéma)



- $AE = 10$m
- Par la suite $AB = x$ et $A(x)$ désigne l'aire de baignade , c'est-à-dire l'aire du rectangle $EFCB$.
- Le cordon de 180m correspond aux segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
- La droite (EF) est la limite entre le sable et l'eau.



1. **Première tentative**
   - **a)** Il commence par une largeur de $AB = 30m$.
     Déterminer quelles seront les dimensions du rectangle $EFCB$ puis son aire

      Attention, tenir compte des 10 m perdus pour attacher le cordon).
   - **b)** Montrer sur un autre exemple (avec $AB \neq 30$) que l'aire du rectangle $EFCB$ n'est pas toujours la même.
2. **Modélisation**
   On constate que la surface de l'aire de baignade est fonction de la distance AB.
   On pose alors $AB = x$ et on note $A(x)$ la surface de l'aire de baignade en m^2
   - **a)** Expliquer pourquoi $x \in [10\ ;\ 90]$.
   - **b)** Montrer que la distance BC est égale à $180 - 2x$
   - **c)** Expliquer qu'une formule pour l'aire $A(x)$ est $A(x) = (180 - 2x) \times (x - 10)$ et en déduire la forme développée de $A(x)$

3. Observations On souhaite disposer d'une aire de baignade supérieure à 3000m^2 .

a) Compléter le tableau ci-dessous :

Valeurs de x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Valeurs de $A(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

b) Tracer la courbe de la fonction A sur le graphique situé à la fin .

c) Par lecture graphique : Donner pour quelles valeurs de x l'aire dépassera les 3000m^2 .

d) Donner pour quelle(s) valeur(s) l'aire semble maximale et quel est ce maximum .

4. Démonstration de la première observation

a) Montrer que $A(x) = 3200 - 2(x-50)^2$, pour tout $x \in [10\ ;\ 90]$ (forme canonique) .

b) On veut résoudre $A(x) \geqslant 3000$.
Montrer que cette équation est équivalente à $100 - (x-50)^2 \geqslant 0$.

c) Factoriser $100 - (x-50)^2$ (en expliquant la méthode, on doit obtenir $(60-x)(x-40)$ à utiliser pour la suite) .

d) A l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de $(60-x)(x-40)$ et en déduire les valeurs de x pour lesquelles l'aire dépasse 3000m^2 .

5. Démonstration de la seconde observation
À l'aide de la forme canonique (donnée au 4.a)) ou par une autre méthode de votre choix , démontrer le résultat observé au 3.d) .

6. Question non guidée : *Dans cette question , toute trace de recherche, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.*
On conseille au plagiste de faire une aire demi-circulaire pour que l'aire de baignade soit plus grande. (Les 180 mètres de cordon servent pour les segments $[AE]$ et $[DF]$ ainsi que pour le demi cercle) .
Déterminer cette aire.