Soutien , séance 2 : Études de signes

Expression de la forme *ax + b*

Le signe de ax + b est donné par le tableau ci-dessous :

Valeurs de x	$-\infty$		-b/a		$+\infty$
Signe de ax + b		**signe de (-a)**	**0**	**signe de a**	

Généralisation au cas d'une fonction monotone

■ Si l'on sait qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I et s'il existe une valeur α de cet intervalle telle que **f(α) = 0** , alors le signe de $f(x)$ est :

x	a		α		b
$f(x)$		$-$	0	$+$	

.

■ Si l'on sait qu'une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I et s'il existe une valeur α de cet intervalle telle que **f(α) = 0** , alors le signe de $f(x)$ est :

x	a		α		b
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Expression de degré 2 (c'est-à-dire de la forme *ax² + bx + c* , avec $a \neq 0$) :

Trois cas sont à considérer:

■ Si $\Delta > 0$, alors f a deux racines x_1 et x_2 et , pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Le signe de $f(x)$ est donné par :

Valeurs de x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax² + bx + c		signe de *a*	0	opposé du signe de *a*	0	signe de *a*	

■ Si $\Delta = 0$, alors f a une racine x_0 . Le signe de $f(x)$ est donné par :

Valeurs de x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax² + bx + c		signe de *a*	0	signe de *a*	

■ Si $\Delta < 0$, alors f ne possède aucune racine réelle et Le signe de $f(x)$ est donné par :

Valeurs de x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax² + bx + c		*signe de a*	

Expression avec l'exponentielle

Dans ce cas , pas de propriété permettant d'obtenir directement le signe de $f(x)$.
Il faut donc résoudre chacune des inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.
On peut utiliser les équivalences suivantes :

$$e^{u(x)} > e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x) \qquad \text{et} \qquad e^x > k \Leftarrow x > \ln k \quad \text{, si } k > 0$$

On peut également utiliser le fait que $e^x > 0$, pour tout réel x .

Signes et opérations algébriques

Produit Si A et B sont de **même signe** , alors le produit $A \times B$ est **positif** .
S'ils sont de signe opposé , alors le produite $A \times B$ st négatif .
Inverse L'inverse d'un nombre positif est positif . L'inverse d'un nombre négatif est négatif

Quotient Si A et B sont de **même signe** , alors le quotient $\frac{A}{B}$ est **positif** .

S'ils sont de **signe opposé** , alors le quotient $\frac{A}{B}$ est **négatif** .

EXERCICE 1

Étudier le signe de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x) = 3x + 2$ $\quad f(x) = 4 - 5x$ $\quad f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\quad f(x) = -25x^2 + 10x - 1$ $\quad f(x) = -3x^2 + x + 1$

$f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3)$ $\quad f(x) = (4 - x^2)(x^2 + x - 2)$ $\quad f(x) = \frac{3x+1}{5-x}$

$f(x) = \frac{4x^2 - 25}{2x+3}$ $\quad f(x) = (3x^2+2)x$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{(x+3)^2}$

EXERCICE 2

Chacune des expressions suivantes garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Le justifier .

$f(x) = e^x$ $\quad f(x) = 2e^{2\cos x + 4172 + 89\pi + x^3}$ $\quad f(x) = \frac{-3}{e^x+5}$ $\quad f(x) = -4(2x+3)^2 e^{-2x}$

EXERCICE 3

Étudier le signe de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x) = e^x - 3$ $\quad f(x) = 3e^{2x} - 5$ $\quad f(x) = (2e^{-2x} - 1)(e^x - 3)$

EXERCICE 4

On note f *la fonction définie par* $f(x) = 3e^x + 2x - 3$.

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(x)$.

EXERCICE 5

On note f *la fonction définie par* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

Étudier le sens de variation de la fonction f (les limites aux bornes ne sont pas demandées) .

EXERCICE 6

On note f *la fonction définie par* $f(x) = e^x(2x-7) - 4x^2 + 20x$.

Montrer que $f'(x) = (2x-5)(e^x - 4)$.

Étudier le sens de variation de la fonction f (les limites aux bornes ne sont pas demandées) .