EXERCICE Étude de fonction

On note g la fonction définie par $g(x)=e^{3x-1}+3e^{x}(x-2)$.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ *des nombres réels par*

$$f(x)=e^{2x-1}+x-1$$

On note (C) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *d'unité graphique* 1 *cm*.

Partie A

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. *On donnera les valeurs exactes.*

2.a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Calculer la limite de f en $+\infty$

Partie B

1.a) *On note f' la fonction dérivée de f.*

Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

2.a) Montrer que sur l'intervalle [0 ; 1] l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

b) Donner une valeur arrondie au centième de α

c) Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie C

Montrer que $g'(x)=3e^{x}(e^{2x-1}+x-1)$. En déduire que $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$.

En déduire le sens de variation de la fonction g .

Solution :

Partie A :
1- $f(0)=e^{-1}-1$ et $f(1)=e$
2-a- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-1}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$
b- $f(x)-(x-1)=e^{2x-1}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-1}=0$ donc la droite d'équation $y=x-1$ est bien asymptote à la courbe de *f* en $-\infty$ car l'écart vertical entre la droite et la courbe tend vers 0.
c- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-1}=+\infty$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$: donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Partie B :
1.a) *On note f' la fonction dérivée de f.* Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et étudier son signe.
$f=e^u+v$ avec $u(x)=2x-1$ et $v(x)=x-1$ donc $u'(x)=2$ et $v'(x)=1$
$f'=(e^u)'+v'=u'e^u+v'$ et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=2e^{2x-1}+1$
Une exponentielle est toujours positive, et ici on ajoute 1, donc $f'(x)$ est toujours strictement plus grand que 1, donc strictement positif.
ATTENTION: Par contre vous ne pouvez pas ici vous contenter d'un tableau de signes, car on ne fait un tableau de signes que pour appliquer la règle des signes, or ici la fonction est une somme et non un produit ou un quotient.
1.b) Dresser le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$
Il suffit de faire un tableau avec une flèche pour dire que *f* est croissante, et mettre les limites trouvées au A
2.a) Montrer que sur l'intervalle [0 ; 1] l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .
On sait que *f* est strictement croissante (car sa dérivée est strictement positive), que *f* est continue car c'est une somme et une composée de fonctions affines et exponentielle, toutes continues.
De plus $f(0)=e^{-1}-1\approx-0{,}63$ et $f(1)=e\approx2{,}7$ donc 0 est compris entre *f*(0) et *f*(1). D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution et cette solution est comprise entre 0 et 1
1.b) Donner une valeur arrondie au centième de α
On se sert du tableau de valeurs de la calculatrice, et pour justifier il suffit de donner: $f(0{,}31)\approx-0{,}006$ et $f(0{,}315)\approx0{,}006$ ce qui permet d'affirmer que: $0{,}31<\alpha<0{,}315$ et donc que l'arrondi à 0,01 près est $\alpha\approx0{,}31$ (essayez de respecter la consigne: donnez un arrondi et non une simple valeur approchée ou encore pire un encadrement)
1.c) Préciser le signe de *f*(*x*) selon les valeurs de *x*.
f est strictement croissante et $f(\alpha)=0$ donc *f* est négative pour $x<\alpha$ et positive pour $x>\alpha$

Partie C :
$g(x)=e^{3x-1}+3e^x(x-2)$ de la forme $g=e^w+u\times v$ avec $u(x)=3e^x$ donc $u'(x)=3e^x$ et $v(x)=x-2$ donc $v'(x)=1$ et $w(x)=3x-1$ donc $w'(x)=3$
On en déduit que :
$g'=w'e^w+u'v+v'u$ soit $g'(x)=3e^{3x-1}+(x-2)\times3e^x+3e^x=3e^x(e^{2x-1}+(x-2)+1)=3e^{3x}f(x)$
Et comme 3>0 et une exponentielle aussi, *g'* est du signe de *f*, donc *g* est croissante après $x=\alpha$ et décroissante avant.