Exercices proposés au BAC

EXERCICE 1

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et K sont des entiers naturels, U est un nombre réel
Entrée	Demander la valeur de N
Initialisation	U prend la valeur 1
Traitement	Pour K allant de 1 à N
	U prend la valeur $2U - \frac{1}{4}U^2$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

N	U	K
3	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$

Compléter le tableau ci-contre correspondant aux valeurs de K et U obtenues successivement lorsqu'on entre $N = 3$. On arrondira si nécessaire les valeurs à 0,01 près .

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{4}u_n^2$.

a) Vérifier que , pour tout entier n , $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}(4-u_n)^2$. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

b) Montrer que , pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n(4-u_n)$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .

d) Montrer que ℓ vérifie $\ell^2 - 4\ell = 0$, puis déterminer sa valeur .

EXERCICE 2

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et , pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ $\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. Afin d'afficher les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur, on propose l'algorithme ci-contre :

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?

Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus précédemment ?

b) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
	Fin pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$. Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n, puis étudier la convergence de la suite (d_n).

4. On admet que pour tout entier naturel n, $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$.

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

EXERCICE 3

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\,(1-u_n) \end{array}\right. ,$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	*u* est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	*u* prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que … faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n\,(1-v_n) \end{array}\right. ,$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :
$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

EXERCICE 4

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$.
On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.

a) Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

e) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

Il utilise l'algorithme ci-contre.

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher ....