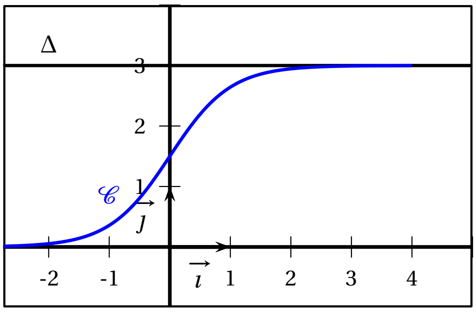
Études de fonctions

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

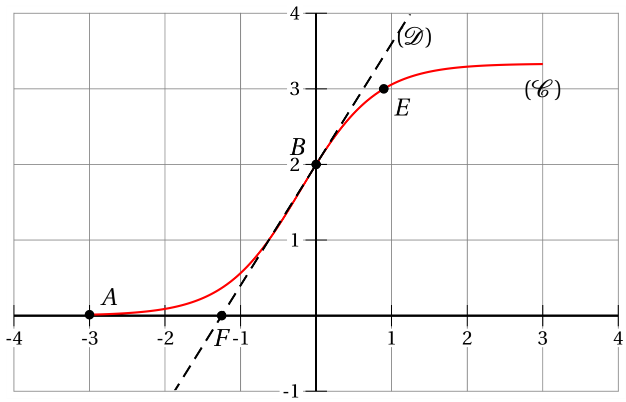
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 2

On note f la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{10\mathrm{e}^{2x}}{3\mathrm{e}^{2x}+2}$.

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$tracée dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée ci-contre :

- A et B sont les points de $(\mathscr{C})$d'abscisses respectives -3 et 0 .
- E est le point d'ordonnée 3 .
- $(\mathscr{D})$ est la tangente à $(\mathscr{C})$au point B .
- F est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ avec l'axe des abscisses .



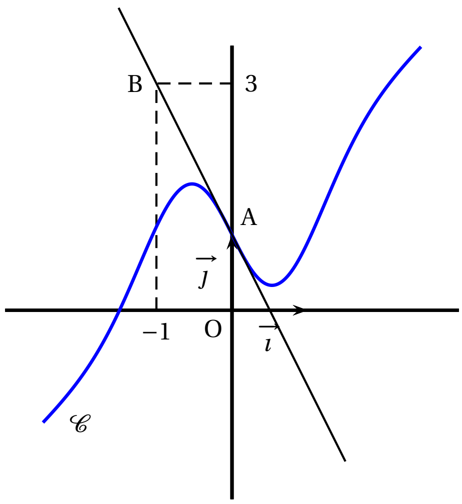
1. Montrer que f est strictement croissante sur $[-3\,;\,3]$.
2. Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{D})$.
3. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points A , B , E et F .

EXERCICE 3

Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, $f(x) = x+1+ax\mathrm{e}^{-x^2}$.



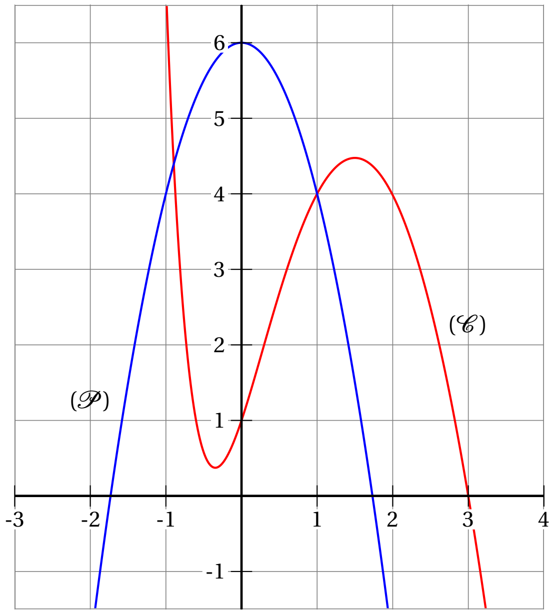
1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
3. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

4. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

   Déterminer la valeur du réel a.

EXERCICE 4



On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 6x - 2x^2 + (1-x)e^{-2x}$.

1. a) Montrer que , pour tout réel x , $f'(x) = e^{-2x}(3-2x)(2e^{2x}-1)$.
   b) Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $(3-2x)(2e^{2x}-1)$.
   Compléter le tableau de signe ci-dessous et en déduire le sens de variation de f .

x	$-\infty$ $\cdots$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de $3-2x$	0
Signe de $2e^{2x}-1$	0
Produit	0 0

2. On a tracé dans un même repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ($\mathscr{C}$), la courbe représentative de f et la parabole ($\mathscr{P}$) d'équation $y = 6 - 2x^2$.
   a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6 - 2x^2$.
   b) Retrouver la valeur exacte de chacune des solutions de cette équation par le calcul .

EXERCICE 5

Soit a un nombre réel fixé strictement positif .
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n ,$u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.
   a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
   b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
   c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.
   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

   a) Compléter la partie « Traitement ».
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.