Soutien : Intégrales et primitives

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES :

Une fonction F est la primitive d'une fonction f si f est la dérivée de F : $F'=f$

On se sert donc des formules de dérivation, mais en sens inverse, pour trouver des primitives :

composées... de ces dérivées

Dérivées des fonctions usuelles :		**Primitives des fonctions usuelles**	
f définie par	f' définie par	f définie par	F définie par
$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$	$f(x)=a$	$F(x)=a\,x+k$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+k$
$f(x)=x^n$ (n entier $\geqslant 2$)	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)+k$ ou $F(x)=\ln(-x)+k$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=\frac{-1}{x}+k$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+k$
$f(x)=\ln(x)$	$f(x)=\frac{1}{x}$		

Opérations sur les dérivées		**Opérations sur les primitives**
$f=ku$	$f'=ku'$	
$f=u+v$	$f'=u'+v'$	
$f=uv$	$f'=u'v+uv'$	
$f=\frac{1}{u}$	$f'=-\frac{u'}{u^2}$	
$f=\frac{u}{v}$	$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
$f=\sqrt{u}$	$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$f=u^n$	$f'=n\times u^{n-1}\times u'$	
$f=e^u$	$f'=u'\times e^u$	
$f=\ln(u)$	$f'=\frac{u'}{u}$	
$f=v\circ u$	$f'=u'\times v'\circ u$	

EXERCICE I:

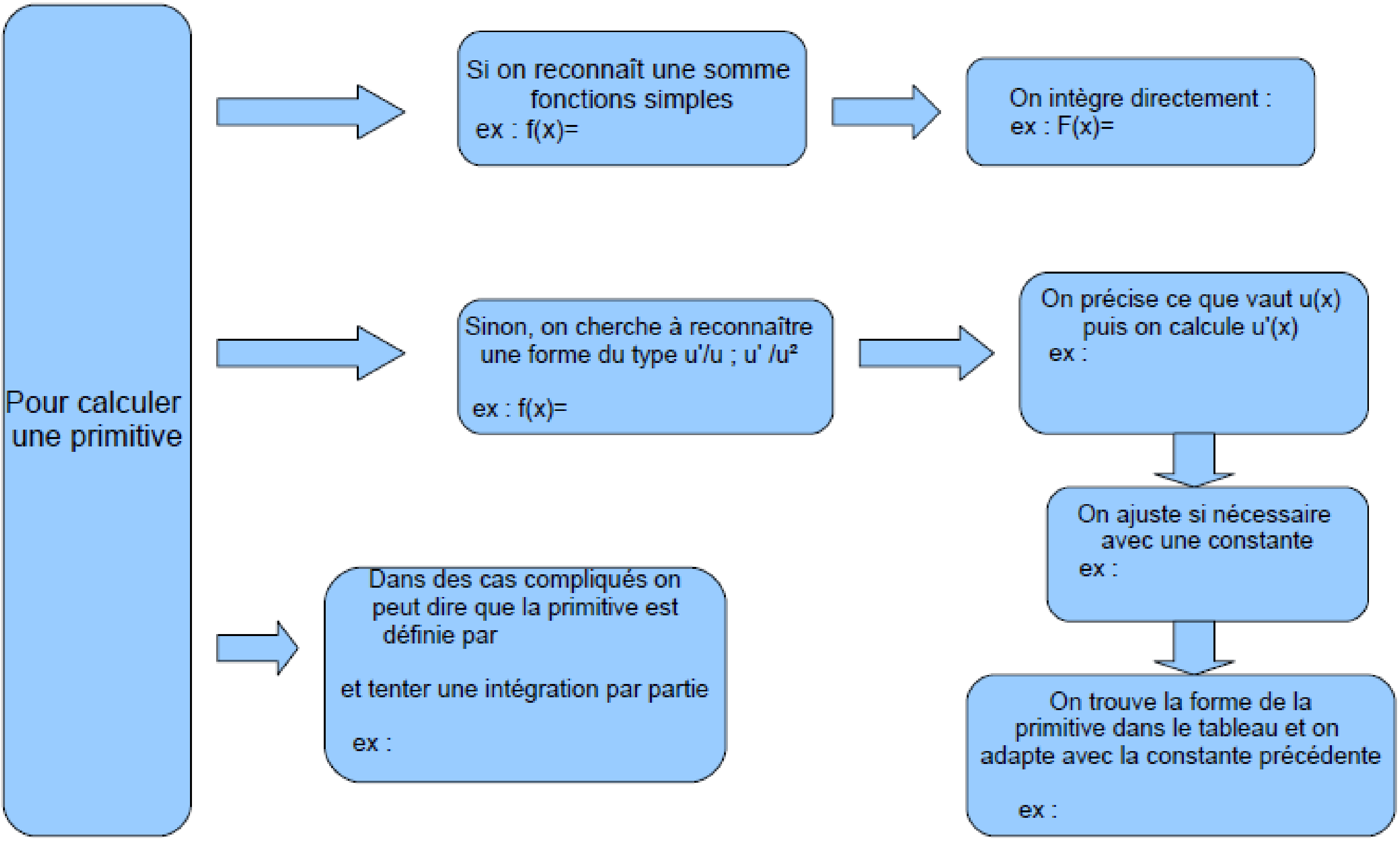
1- Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a- $f(x)=3x^2-5x$ b- $g(x)=\frac{5}{2x-4}$ définie pour $x>2$ c- $h(x)=3e^{-2x}$

2- a- Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction définie par $f(x)=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b- En déduire la primitive F telle que F(0)=3

<u>Méthode pour calculer une primitive</u> :



RAPPELS SUR LES INTEGRALES

\# **La méthode la plus courante** pour calculer une intégrale, c'est de trouver une primitive de la fonction et d'utiliser : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

\# On peut aussi utiliser la **formule d'intégration par parties :**

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

\# On peut aussi parfois se servir de son **interprétation graphique** : Si *f* est positive et si $a<b$ $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unité d'aire) comprise entre la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$

\# On peut aussi se servir dans certains cas des propriétés de l'intégrale : sa **linéarité**, la **relation de Chasles**, sa **conservation de l'ordre** (qui conduit à l'inégalité de la moyenne), en se méfiant de l'ordre des bornes :

$$\int_a^b f(x)=dx=-\int_b^a f(x)dx$$

EXERCICE II :

1- Calculer les intégrales suivantes :

a- $\int_0^1 3e^{1-x}dx$ b- $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2}dx$ c- $\int_{-1}^0 3xe^{2x+2}dx$

2- On considère *f* définie par $f(x)=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$

a- Montrer que $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$

b- Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$ et $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$.

c-En déduire $\int_1^2 f(x)dx$

Exercice II -2 correction

a- On part du résultat qu'on met sous le même dénominateur :

$$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2}=\frac{3x+1}{(x+1)^2}=f(x)$$

b- Une primitive de $x\rightarrow\frac{1}{x+1}$ est $x\rightarrow\ln(x+1)$ car $\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x+1$ et x+1 est positif sur [1;2] donc une primitive en est ln(u)

On en déduit $\int_1^2\frac{1}{x+1}dx=[\ln(x+1)]_1^2=\ln(3)-\ln(2)=\ln(\frac{3}{2})=\ln(1{,}5)$

Et une primitive de $x\rightarrow\frac{1}{(x+1)^2}$ est $x\rightarrow-\frac{1}{x+1}$ car une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $\frac{-1}{u}$ (ici $u(x)=x+1$)

On en déduit : $\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}dx=[\frac{-1}{x+1}]_1^2=\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

c- $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}dx=3\int_1^2\frac{1}{x+1}dx-2\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}dx$ par linéarité de l'intégrale, et on utilise les résultats précédents pour trouver que l'intégrale vaut $3\times\ln(1{,}5)-2\times\frac{1}{6}=3\ln(1{,}5)-\frac{1}{3}\approx0{,}88$ comme on peut le vérifier à la calculatrice.