# *Soutien : Intégrales et primitives*

***RAPPELS SUR LES PRIMITIVES :***

Une fonction $F$ est la primitive d'une fonction $f$ si $f$ est la dérivée de $F$ : $F'=f$

On se sert donc des formules de dérivation, mais en sens inverse, pour trouver des primitives :

| **Dérivées des fonctions usuelles** : | | **Primitives des fonctions usuelles** | |
|---|---|---|---|
| $f$ définie par | $f'$ définie par | $f$ définie par | $F$ définie par |
| $f(x)=k$ (constante) | $f'(x)=0$ | $f(x)=a$ | $F(x)=a\,x+k$ |
| $f(x)=x$ | $f'(x)=1$ | $f(x)=x$ | $F(x)=\frac{1}{2}x^2+k$ |
| $f(x)=x^n$ ($n$ entier $\geqslant 2$) | $f'(x)=nx^{n-1}$ | $f(x)=x^n$ | $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ | $f(x)=\frac{1}{x}$ | $F(x)=\ln(x)+k$ ou $F(x)=\ln(-x)+k$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $f(x)=\frac{1}{x^2}$ | $F(x)=\frac{-1}{x}+k$ |
| $f(x)=e^x$ | $f'(x)=e^x$ | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x)=2\sqrt{x}+k$ |
| $f(x)=\ln(x)$ | $f(x)=\frac{1}{x}$ | | |
| **Opérations sur les dérivées** | | **Opérations sur les primitives** | |
| $f=ku$ | $f'=ku'$ | $f$ définie par : | F définie par |
| $f=u+v$ | $f'=u'+v'$ | *f=ku'* | *F=ku+constante* |
| $f=uv$ | $f'=u'v+uv'$ | *f=u'+v'* | *F=u+v +constante* |
| $f=\frac{1}{u}$ | $f'=-\frac{u'}{u^2}$ | *f=u' u* | $F=\frac{1}{2}u^2+constante$ |
| $f=\frac{u}{v}$ | $f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ | *f=u' u²* | $F=\frac{1}{3}u^3+constante$ |
| $f=\sqrt{u}$ | $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $f=u'u^n$ | $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+constante$ |
| $f=u^n$ | $f'=n\times u^{n-1}\times u'$ | $f=\frac{u'}{u}$ | *F=ln(u)+constante ou F=ln(-u) +constante* |
| $f=e^u$ | $f'=u'\times e^u$ | $f=\frac{u'}{u^2}$ | $F=\frac{-1}{u}+constante$ |
| $f=\ln(u)$ | $f'=\frac{u'}{u}$ | $f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $F=2\sqrt{u}+constante$ |
| | | $f=u'e^u$ | $F=e^u+constante$ |

***EXERCICE I***:

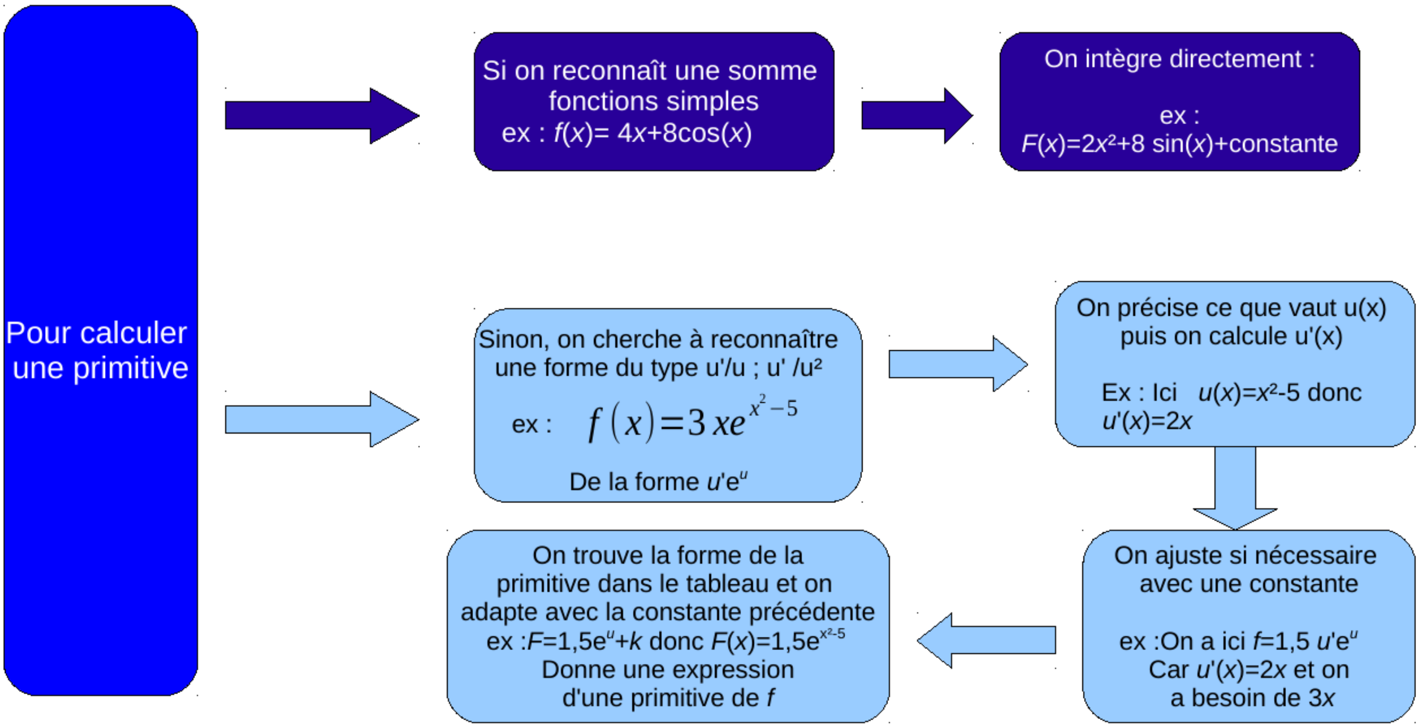
1- Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a- $f(x)=3x^2-5x$ b- $g(x)=\frac{5}{2x-4}$ définie pour $x>2$ c- $h(x)=3e^{-2x}$

2- a- Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction définie par $f(x)=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b- En déduire la primitive F telle que F(0)=3

**<u>Méthode pour calculer une primitive</u>** :




***RAPPELS SUR LES INTEGRALES***

**# La méthode la plus courante** pour calculer une intégrale, c'est de trouver une primitive de la fonction et d'utiliser : $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

# On peut aussi parfois se servir de son **interprétation graphique** : Si $f$ est positive et si $a<b$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire (en unité d'aire) comprise entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

# On peut aussi se servir dans certains cas des propriétés de l'intégrale : sa **linéarité**, la **relation de Chasles**, sa **conservation de l'ordre** (qui conduit à l'inégalité de la moyenne), en se méfiant de l'ordre des bornes :

$$\int_a^b f(x)=dx=-\int_b^a f(x)dx$$

***EXERCICE II :***

1- Calculer les intégrales suivantes :

a- $\int_1^5 \frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+x\,dx$ b- $\int_0^1 3e^{1-x}dx$ c- $\int_0^2 \frac{x}{x^2+2}dx$

2- On considère $f$ définie par $f(x)=\frac{3x+1}{(x+1)^2}$

a- Montrer que $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$

b- Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$ et $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ .

c-En déduire $\int_1^2 f(x)dx$

Correction

I-1- a- $f(x)=3x^2-5x$ a pour primitive $F(x)=x^3-2{,}5x^2$

b- $g(x)=\dfrac{5}{2x-4}$ définie pour $x$>2 est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=2x-4$ donc $u'(x)=2$ et donc $g=\dfrac{2{,}5u'}{u}$ et comme $u$ est positive sur l'intervalle donné, une primitive de $g$ est $G$=2,5 ln($u$) soit $G(x)=2{,}5\ln(2x+4)$ .

c- $h(x)=3e^{-2x}$ est de la forme $u'e^u$ avec u(x)=-2 x donc $h=-1{,}5u'e^u$ et donc $H=-1{,}5e^u$ est une primitive de $h$, soit $H(x)=-1{,}5e^{-2x}$ .

2- a- $f(x)=\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=1+e^{-x}$ donc $u'(x)=-e^{-x}$ et donc $f=\dfrac{-2u'}{u}$ dont l'ensemble des primitives, puisque $u$ est positive (somme de 1>0 et d'une exponentielle), est l'ensemble des fonctions $F=-2\ln(u)+k$ où $k\in\mathbb{R}$ soit $F(x)=-2\ln(1+e^{-x})+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ .

b- $F(0)=3\Leftrightarrow -2\ln(1+e^{-0})+k=3\Leftrightarrow -2\ln(2)+k=3\Leftrightarrow k=3+2\ln(2)$ donc l'expression de la primitive cherchée est $F(x)=-2\ln(1+e^{-x})+3+2\ln(2)=3+2\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)$ si on veut utiliser $\ln(a)-\ln(b)=\ln(\dfrac{a}{b})$ .

II-1-a- $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+x\,dx=\left[\ln(x)+3\times\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}x^2\right]_1^5=\left(\ln(5)-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times 5^2\right)-\left(\ln(1)-3+\frac{1}{2}\times 1^2\right)=14{,}4+\ln(5)$

b- $\displaystyle\int_0^1 3e^{1-x}\,dx=[-3e^{1-x}]_0^1=-3e^0-(-3e^1)=3e-3$ en reconnaissant $f=-3u'e^u$ donc $F=-3e^u$

c- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+2}\,dx=[\frac{1}{2}\ln(x^2+2)]_0^2=\frac{1}{2}\ln(6)-\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{1}{2}(\ln(6)-\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(\frac{6}{2})=\frac{1}{2}\ln(3)=\ln(\sqrt{3})$ qu'on n'est pas obligé de simplifier ainsi, après avoir repéré comme forme $f=0{,}5\dfrac{u'}{u}$ puisque $u(x)=x^2+2$ et donc $u'(x)=2x$ et non $x$ , ce qui donne comme primitive puisque la fonction $u$ est positive : $F=0{,}5\ln(u)$ .

2-a- On part du résultat qu'on met sous le même dénominateur :

$$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2}=\frac{3x+1}{(x+1)^2}=f(x)$$

b- Une primitive de $x\rightarrow\dfrac{1}{x+1}$ est $x\rightarrow\ln(x+1)$ car $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x+1$ et x+1 est positif sur [1;2] donc une primitive en est ln($u$)

On en déduit $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx=[\ln(x+1)]_1^2=\ln(3)-\ln(2)=\ln(\frac{3}{2})=\ln(1{,}5)$

Et une primitive de $x\rightarrow\dfrac{1}{(x+1)^2}$ est $x\rightarrow-\dfrac{1}{x+1}$ car une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$ (ici $u(x)=x+1$ )

On en déduit : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx=[\frac{-1}{x+1}]_1^2=\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

c- $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\,dx=3\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx-2\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ par linéarité de l'intégrale, et on utilise les résultats précédents pour trouver que l'intégrale vaut $3\times\ln(1{,}5)-2\times\dfrac{1}{6}=3\ln(1{,}5)-\dfrac{1}{3}\approx 0{,}88$ comme on peut le vérifier à la calculatrice.