AP : Limites de suites : Eléments de correction

I- Exercices sur les principales méthodes :

1- Pour chacune des suites ci-dessous déterminer si elle existe sa limite (en justifiant)

$a_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}=(a_n)^2+n$ (on pourra utiliser le théorème de comparaison)

On peut remarquer qu'un carré étant toujours positif $a_{n+1}\geqslant n$ *pour tout n ce qui donne pour tout* $n\geqslant 1$ $a_n\geqslant n-1$ *et comme la limite de n-1 est* $+\infty$ *, par comparaison il en est de même pour la suite a.*

$c_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $c_{n+1}=1{,}02c_n$

C'est une suite géométrique donc $c_n=2\times 1{,}02^n$ *pour tout n et comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ *si q>1, on en déduit que la suite diverge vers* $+\infty$ *.*

$d_0=520$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $d_{n+1}=d_n-0{,}2$

Cette fois-ci la suite est arithmétique de raison r<0 donc elle diverge vers $-\infty$

$e_0=-10$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $e_{n+1}=0{,}5e_n+3$ (*question non guidée : voir plus loin)

$b_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n^2+b_n+\dfrac{1}{n}$ (*question non guidée : voir plus loin)

2- Première version guidée pour *e*.

a- Montrer que si la suite converge alors sa limite est 6.

Si la suite converge vers un nombre L alors la suite (e_{n+1}) *converge aussi vers L mais* $e_{n+1}=0{,}5e_n+3$ *donc elle doit aussi converger vers 0,5L+3, et comme la limite d'une suite est unique on obtient* $L=0{,}5L+3\Leftrightarrow L=6$

b- On considère la suite définie par $u_n=e_n-6$. Montrer que la suite *u* est géométrique de raison 0,5.

$u_{n+1}=e_{n+1}-6=0{,}5e_n+3-6=0{,}5e_n-3=0{,}5(e_n-6)=0{,}5u_n$ *ou si on ne pense pas à factoriser par 0,5, en remplaçant* e_n *par* u_n+6 *. La suite u est donc géométrique de raison 0,5.*

c- En déduire une expression de e_n en fonction de *n* puis sa limite.

$u_n=u_n\times q^n$ *or* $u_0=e_0-6=-16$ *donc* $u_n=-16\times 0{,}5^n$ *et* $e_n=u_n+6=6-16\times 0{,}5^n$ *dont la limite est 6 puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ *si -1<q=0,5<1.*

3- Seconde version guidée pour la suite *e*.

On considère qu'on a déjà répondu au 2.a et donc que la limite si la suite converge est 6.

a- Montrer que la suite est majorée par 6.

Par récurrence, on montre que $e_n\leqslant 6$

initialisation : $e_0=-10\leqslant 6$

hérédité : On montre que si $e_n\leqslant 6$ *alors* $e_{n+1}\leqslant 6$

En effet : $e_n\leqslant 6\Rightarrow 0{,}5e_n\leqslant 3\Rightarrow 0{,}5e_n+3\leqslant 6\Leftrightarrow e_{n+1}\leqslant 6$ *ce qui clôt la récurrence : La suite est majorée par 6.*

b- Montrer que la suite est croissante.

On peut le faire par récurrence, ou en se servant de la majoration précédente pour obtenir le signe de $e_{n+1}-e_n$ *.*

Par récurrence : On montre que $e_n\leqslant e_{n+1}$

Initialisation : $e_0=-10$ *et* $e_1=0{,}5\times -10+3=-2$ *donc* $e_0\leqslant e_1$

Hérédité : On montre que si $e_n\leqslant e_{n+1}$ *alors* $e_{n+1}\leqslant e_{n+2}$

En effet on va passer d'une inégalité à l'autre en multipliant par 0,5>0 qui ne change pas l'ordre puis en ajoutant 3 ce qui ne change pas l'ordre :

$e_n\leqslant e_{n+1}\Rightarrow 0{,}5e_n\leqslant 0{,}5e_{n+1}\Rightarrow 0{,}5e_n+3\leqslant 0{,}5e_{n+1}+3\Rightarrow e_{n+1}\leqslant e_{n+2}$ *ce qui clôt la récurrence.*

c- Conclure.

La suite est croissante et majorée, donc elle converge, la limite est alors 6, d'après la réponse du 2.a.

4- Version guidée (plus la question d) pour *b*

a- Montrer que la suite *b* est croissante.

$b_{n+1}=b_n^2+b_n+\frac{1}{n}$ *donc* $b_{n+1}-b_n=b_n^2+\frac{1}{n}>0$ *car un carré est positif et* $n\in\mathbb{N}$ *donc la suite est croissante.*

b- Si elle était majorée, que pourrait-on en déduire pour sa limite éventuelle ?

Si elle était majorée en plus d'être croissante, elle convergerait vers une limite L, laquelle serait aussi la limite de la suite (b_{n+1}) *et comme* $b_{n+1}=b_n^2+b_n+\frac{1}{n}$ *la limite devrait vérifier, comme* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ *, que* $L=L^2+L\Leftrightarrow L=0$ *ce qui est impossible car b0=1 et que la suite est croissante !*

c- En déduire qu'elle n'est pas majorée. Quelle est alors sa limite ?

On vient de montrer que si elle était majorée sa limite serait 0, ce qui est absurde, donc elle n'est pas majorée. Or une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$ *d'après un résultat du cours. C'est donc le cas de la suite b.*

d- Une suite non majorée a-t-elle toujours pour limite $+\infty$?

Non, pas forcément si elle n'est pas croissante, par exemple $u_n=(-2)^n$ *n'est pas majorée car* $\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ *mais comme un terme sur deux est négatif, elle n'a pas de limite.*

On peut en imaginer des plus farfelues, par exemple $u_n=n$ *si n est un nombre premier (programme de spécialité) et* $u_n=0$ *si n n'est pas un nombre premier, comme il y a une infinité de nombres premiers, elle n'est pas majorée, mais elle est presque toujours égale à 0 donc sa limite (elle n'en a pas) n'est pas* $+\infty$ *.*

II- Question théoriques type vrai-faux de bac :

1- Si pour tout *n* , $u_n>v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$ alors la limite de *v* est un nombre strictement inférieur à 3.

Faux ça peut aussi être 3, par exemple $v_n=3-\frac{1}{n}$ *, ou ne pas avoir de limite :* $v_n=(-1)^n$ *ou avoir pour limite* $-inifnity$ *:* $v_n=2-n$.

2- Si pour tout *n* , $u_n>v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ alors la limite de *v* est $-\infty$.*Vrai, th. de comparaison.*

3- Si les suites *u* et *v* divergent alors *u*+*v* diverge.

Faux, il suffit de faire en sorte que les deux se « compensent » par exemple $u_n=n$ *et* $v_n=-n$ *dont la somme est constante égale à 0.*

4- Si la suite *u* converge et la suite *v* diverge alors *u*.*v* diverge.

Faux si u converge vers 0, par exemple $u_n=\frac{1}{n}{}^2$ *et* $v_n=n$ *dont le produit* $\frac{1}{n}$ *converge vers 0.*

5- Si $u_n<\frac{1}{n}$ pour tout *n*>0, alors *u* converge vers 0.

Faux, on ne précise pas que u_n *doive être positif, par exemple* $u_n=-n$ *convient qui diverge vers* $-\infty$.

III- Début d'un sujet de bac avec algorithme :

<table>
<tr>
<td>

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

</td>
<td>

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0<u_n<2$

2.b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

2.c. Déterminer la limite de la suite.

</td>
</tr>
</table>

1-a- Pour I=1 on a $u=\sqrt{2}$ *, puis pour I=2* $u=\sqrt{2\sqrt{2}}$ *puis pour I=3* $u=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\approx 1,8340$
b- Il affiche le terme de rang n de la suite u.
c- Elle semble converger vers 2.
2-a- Par récurrence :
Initialisation : $0<u_0=1<2$ *donc vrai pour n=0*
Hérédité : On montre que si $0<u_n<2$ *alors* $0<u_{n+1}<2$
$0<u_n<2\Rightarrow 0<2u_n<4\Rightarrow\sqrt{0}<\sqrt{2u_n}<\sqrt{4}\Rightarrow 0<u_{n+1}<2$ *car multiplier par 2>0 puis appliquer la fonction racine carrée qui est strictement croissante sur [0 ; 4] conserve l'ordre.*
On a donc bien montré que la suite est bornée par 0 et 2.
2-b- On le montre par récurrence aussi :
Initialisation : $0<u_0=1<u_1=\sqrt{2}$ *donc vrai pour n=0*
Hérédité : On montre que si $u_n<u_{n+1}$ *alors* $u_{n+1}<u_{n+2}$
$u_n<u_{n+1}\Rightarrow 2u_n<2u_{n+1}\Rightarrow\sqrt{2u_n}<\sqrt{2u_{n+1}}\Rightarrow u_{n+1}<u_{n+2}$ *car multiplier par 2>0 puis appliquer la fonction racine carrée qui est strictement croissante sur [0 ; 4], dans lequel sont les carrés des termes de la suite, conserve l'ordre.*
2-c La suite est croissante et majorée par 2 donc elle converge.
Si on note L sa limite, celle-ci est positive ou nulle car tous les termes de la suite le sont et elle doit vérifier $L=\sqrt{2L}$ *car* $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$ *donc (u_{n+1}) doit converger vers L et vers* $\sqrt{2L}$.
On en déduit en élevant au carré chaque membre que $L^2=2L\Leftrightarrow L^2-2L=0\Leftrightarrow L(L-2)=0\Leftrightarrow L=0\,ou\,L=2$.
L=0 est impossible car la suite est croissante et son premier terme est 1, donc la limite est 2.