AP : Limites de suites

I- Exercices sur les principales méthodes :

1- Pour chacune des suites ci-dessous déterminer si elle existe sa limite (en justifiant)

$a_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}=(a_n)^2+n$ (on pourra utiliser le théorème de comparaison)

$c_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $c_{n+1}=1{,}02\,c_n$

$d_0=520$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $d_{n+1}=d_n-0{,}2$

$e_0=-10$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $e_{n+1}=0{,}5\,e_n+3$ (*question non guidée : voir plus loin)

$b_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $b_{n+1}=b_n^2+b_n+\frac{1}{n}$ (*question non guidée : voir plus loin)

2- Première version guidée pour *e*.

a- Montrer que si la suite converge alors sa limite est 6.

b- On considère la suite définie par $u_n=e_n-6$. Montrer que la suite *u* est géométrique de raison 0,5.

c- En déduire une expression de e_n en fonction de *n* puis sa limite.

3- Seconde version guidée pour la suite *e*.

On considère qu'on a déjà répondu au 2.a et donc que la limite si la suite converge est 6.

a- Montrer que la suite est majorée par 6.

b- Montrer que la suite est croissante.

c- Conclure.

4- Version guidée (plus la question d) pour *b*

a- Montrer que la suite *b* est croissante.

b- Si elle était majorée, que pourrait-on en déduire pour sa limite éventuelle ?

c- En déduire qu'elle n'est pas majorée. Quelle est alors sa limite ?

d- Une suite non majorée a-t-elle toujours pour limite $+\infty$?

II- Question théoriques type vrai-faux de bac :

1- Si pour tout *n* , $u_n>v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$ alors la limite de *v* est un nombre strictement inférieur à 3.

2- Si pour tout *n* , $u_n>v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ alors la limite de *v* est $-\infty$.

3- Si les suites *u* et *v* divergent alors *u*+*v* diverge.

4- Si la suite *u* converge et la suite *v* diverge alors *u*.*v* diverge.

5- Si $u_n<\frac{1}{n}$ pour tout *n*>0, alors *u* converge vers 0.

III- Début d'un sujet de bac avec algorithme :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :         n est un entier naturel
                    u est un réel positif
Initialisation :    Demander la valeur de n
                    Affecter à u la valeur 1
Traitement :        Pour i variant de 1 à n :
                      | Affecter à u la valeur √(2u)
                    Fin de Pour
Sortie :            Afficher u
```

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n=3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de *n*.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $0<u_n<2$

2.b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

2.c. Déterminer la limite de la suite.