Méthodes relatives aux équations de droites

Déterminer une équation cartésienne de droite

❶ Droite (D) passant par un point A donné et de vecteur directeur $\vec{u}$

Introduction *: Un point* $M(x\,;\,y)$ appartient à (D) si et seulement si $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$.
On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$, puis l'expression $f(x\,;\,y)$ de $dét(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})$ à l'aide de x et y .
Conclusion : *Une équation cartésienne de* (D) *est* $f(x\,;\,y) = 0$.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_1) passant par $A(-2\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$

❷ Droite passant par deux points A et B

On applique la méthode ❶ en utilisant comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : On considère les points A(-2 ; 1) et B(3 ; 3). Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

❸ Droite (D_2) parallèle à une droite (D_1) donnée et passant par le point A

On applique la méthode ❶ en utilisant un vecteur directeur de (D_1) et le point A .

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D_2), parallèle à (D_1) passant par B .

❹ Droite d'équation réduite connue

On transforme l'écriture de l'équation pour se ramener à une équation de la forme $ax + by + c = 0$

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) d'équation réduite $y = 0,8x + 3,6$.

Déterminer l'équation réduite d'une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées)

❶ Droite (D) passant par un point A donné et de coefficient directeur m

On applique la formule $y = m(x - x_A) + y_A$ et on développe le membre de droite de cette équation.

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par $A(-5\,;\,3)$ et de coefficient directeur $m = 0,8$.

❷ Droite passant par deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$)

On applique la méthode ❶ en utilisant la formule $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la droite (D_1) passant par $A(1 ; 3)$ et B$(2 ; -1)$

▶ ❸ Droite (D_2) parallèle à une droite (D_1) donnée et passant par le point A

On applique la méthode ❶ en utilisant le coefficient directeur de (D_1) et le point A .

Exemple : Déterminer une équation de la droite (D_2), parallèle à (D_1) passant par $C(0 ; 5)$

▶ ❹ Droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$ connue

On transforme l'écriture de l'équation pour se ramener à une équation de la forme $y = mx + p$

Exemple : Soit (Δ) la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.Déterminer son équation réduite

Déterminer un vecteur directeur d'une droite

▶ Droite définie par deux points A et B donnés

Si (D) passe par A et B, on peut prendre $\overrightarrow{AB}$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : *On considère les points* $A(1 ; 3)$ *et* $B(2 ; 1,8)$.
Déterminer un vecteur directeur de (AB) à coordonnées entières.

▶ Droite (D) d'équation cartésienne connue

Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) de (D), on peut prendre le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : *On considère la droite* (D_1) *d'équation cartésienne* $x + 3y - 5 = 0$.
Déterminer le vecteur directeur de (D_1) d'ordonnée 5.

▶ Droite (D) définie par une condition de parallélisme

Si (D_2) est parallèle à une droite (D_1) de vecteur directeur $\vec{u}$, on peut prendre le vecteur $\vec{u}$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : Déterminer un vecteur directeur de (D_2), la parallèle à (D) passant par A.

▶ Droite (D) d'équation réduite connue

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), on peut prendre le vecteur $\vec{u}(1;m)$ ou n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : Déterminer un vecteur directeur à coordonnées entières de la droite (Δ) d'équation réduite $y = 0,8x + 2$.

Déterminer le coefficient directeur d'une droite

Droite (D) parallèle à l'axe des abscisses

Dans ce cas, son coefficient directeur est nul.

Droite (D) d'équation réduite connue

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), son coefficient directeur est m que l'on obtient par simple identification.

Exemple : Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_1) d'équation réduite $y = -10x + 56$.

Droite (D) d'équation cartésienne connue

Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $b \neq 0$) de (D), on trouve son équation réduite et on applique la méthode précédente.

Exemple : Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_2) d'équation $x + 3y - 5 = 0$.

Droite passant par deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$)

On calcule m en utilisant la formule $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple : *On considère les points* $A(10 ; 5)$ *et* $B(45 ; 12)$.
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

Droites parallèles aux axes du repère

Si (D)	Une équation cartésienne est	un vecteur directeur est	son coefficient directeur vaut	passe par $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$
est parallèle à l'axe des abscisses	$y - k = 0$	tout vecteur colinéaire à $\vec{u}(1;0)$	$m = 0$	avec $y_A = y_B = k$
est parallèle à l'axe des ordonnées	$x - k = 0$	tout vecteur colinéaire à $\vec{u}(0;1)$	*non défini*	avec $x_A = x_B = k$

Exemples :
On considère les points $E(-3 ; 5)$, $F(-3 ; 8)$ *et* $G(2 ; 8)$.
Déterminer une équation de chacune des droites (EF) et (FG)

Déterminer une équation de la droite (D_1), parallèle à l'axe des abscisses passant par E.

Déterminer une équation de la droite (D_2), parallèle à l'axe des ordonnées passant par G.

Déterminer le coefficient directeur de la droite (D_3) passant par $I(2 ; -1)$ et $J(10 ; -1)$

Vérifier qu'un point $A(x_A ; y_A)$ appartient à une droite

Droite (D) d'équation réduite connue

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D), on calcule $m \times x_A + p$ et on le compare à y_A.
Si $y_A = m \times x_A + p$, alors A appartient à (D). Sinon, il n'appartient pas à (D).

Exemple : Indiquer si chacun des points $E(3 ; 3,5)$ et $F(4 ; 3)$ appartient à la droite (D_1) d'équation réduite $y = -0,6x + 5,4$.

Droite (D) d'équation cartésienne connue

Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) de (D), on calcule $a \times x_A + b \times y_A + c$.
Si le résultat est égal à 0, alors A appartient à (D). Sinon, il n'appartient pas à (D).

Exemple : Indiquer si chacun des points $G(115 ; 186)$ et $H(96 ; 155)$ appartient à la droite (D_2) d'équation réduite $5x - 3y - 17 = 0$.

Vérifier si deux droites (D) et (D') sont parallèles ou sécantes

Si l'on connaît leurs coefficients directeurs respectifs

Si on connaît l'équation réduite $y = mx + p$ de (D) et l'équation réduite $y = m'x + p'$ de (D'), il suffit de comparer les valeurs de m et de m' .
Si $m = m'$, alors (D) et (D') sont parallèles. Sion elles sont sécantes .

Exemple : *On considère les points* $A(-5 ; 1)$ et $B(-4 ; 4)$ *, ainsi que la droite* (D) *d'équation réduite* $y = 3x + 10$
Justifier que les droites (D) et (AB) sont parallèles.

Si l'on connaît un vecteur directeur de chacune de ces droites

Si (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et (D') a pour vecteur directeur $\vec{u}'$, on vérifie si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, alors (D) et (D') sont parallèles. Sinon elles sont sécantes .

Exemple : *On considère les points* $E(1,2 ; 2,8)$ et $F(4,7 ; 4,2)$ *, ainsi que la droite* (Δ) *d'équation cartésienne* $2x - 5y - 10 = 0$.
Les droites (Δ) et (EF) sont-elles parallèles ?