SOUTIEN : EQUATIONS DE DROITES ET DE PLANS DE L'ESPACE

Travail sur les méthodes classiques :

I-1- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB) où A(-1;0;2) et B(0;2;3)
2- Déterminer une équation du plan (P) perpendiculaire à (AB) passant par B.
3- Déterminer une équation du plan (Q) parallèle à (P) passant par C(-2;2;3)
4- Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de (Q) avec la droite (AB)
5- Déterminer la distance de B au plan (Q) de deux manières. Cette distance est en fait la distance entre les plans (P) et (Q)

II- On considère les droites (d) et (d') d'équations paramétriques respectives :
$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t+1 \\ z=2+t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-1+2k \\ y=-2k+3 \\ z=1+k \end{cases}$
1- Le point C(5;-1;4) appartient-il à ces droites ?
2- Montrer que ces deux droites ne sont ni parallèles, ni orthogonales.
3- Sont-elles non-coplanaires ou sécantes ? (le cas échéant, préciser les coordonnées de leur point d'intersection)
4- Montrer que (d) est incluse dans le plan d'équation $x+y-z=0$
5- Montrer que (d') est parallèle au plan d'équation x+y-5=0 (deux méthodes)

III- On considère les plans d'équations respectives $x+3y=0$ et $x-2y+z-1=0$
Etudier leurs positions relatives, et le cas échéant, déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

I- Indications:
1-On connaît un point A (ou B) et un vecteur directeur: $\vec{AB}$
2- $\vec{AB}$ est normal au plan
3- Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires (on peut reprendre le même)
4- On remplace les équations paramétriques de la droite dans l'équation cartésienne du plan, on en déduit la valeur du paramètre, puis on récupère x,y et z.
5- Cette distance est BH et on a aussi une formule.

II- Correction
1- C appartient à (d) si on trouve une valeur de t telle que $\begin{cases} 5=1+2t \\ -1=-t+1 \\ 4=2+t \end{cases}$ et en résolvant les trois équations, on trouve que t=2 convient, donc $C\in(d)$
Par contre avec les équations de (d') on trouve des valeurs différentes pour le paramètre: Le point n'appartient pas à (d')
2- Pour qu'elles soit parallèles, il faut que leur vecteurs directeurs aient la même direction , or pour (d) un vecteur directeur est $\vec{u}(2;-1;1)$ et pour (d') on peut prendre $\vec{v}(2;-2;1)$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles à celle de $\vec{u}$: Les droites ne sont pas parallèles.
Si elles étaient orthogonales, leurs vecteurs directeurs le seraient aussi or
$\vec{u}.\vec{v}=2\times2+(-2)\times(-1)+1\times1=7\neq0$ donc elles ne sont pas orthogonales.
3-Pour savoir si elles sont sécantes, il faut résoudre le système composé de leurs équations soit:
$\begin{cases} x=1+2t=-1+2k \\ y=-t+1=-2k+3 \\ z=2+t=1+k \end{cases}$ La première équation donne t=-1 +k et la troisième donne aussi t=-1+ k donc en remplaçant dans la deuxième on a -t+1=-(-1+k) +1 qui doit être égal à -2 k+3 donc $-k+2=-2k+3 \Leftrightarrow k=1$ ce qui donne donc t=-1+1=0, et donc pour k=1 et t=0 on a bien les égalités nécessaires, qui donnent x=1; y=1 et z=2. Les droites sont sécantes au point I(1;1;2)
(Si on ne trouvait pas de solution, c'est qu'elles ne seraient pas sécantes, comme on a dit qu'elles n'étaient pas parallèles, elles seraient forcément non-coplanaires)

4- Soit on choisit deux points de (d) (par exemple, C et le point I) et on montre que leurs coordonnées vérifient l'équation du plan, donc qu'ils sont dans le plan et donc que la droite est incluse dans le plan.
Soit on cherche l'intersection du plan et de la droite, et on montre qu'elle contient tous les points de la droite:
M point de la droite de coordonnées (1+2 t;- t+1;2+t) appartient au plan si et seulement si:
(1+2 t)+ (-t+1)-(2+t)=0 (équation du plan) ce qui est équivalent à 0=0 ce qui est toujours vrai, donc tous les points de la droite appartiennent au plan, donc la droite est incluse dans le plan d'équation x+y-z=0

5- Un vecteur normal du plan est $\vec{n}(1;1;0)$ et on a vu qu'un vecteur directeur de la droite est $\vec{v}(2;-2;1)$, or $\vec{v}.\vec{n}=2\times1+(-2)\times1+0=0$ donc la droite est orthogonale à la direction orthogonale au plan, c.a.d qu'elle est parallèle au plan.
Autre méthode: On montre que l'intersection de la droite et du plan est vide: Un point M de la droite (d') a pour coordonnées $\begin{cases} x=-1+2k \\ y=-2k+3 \\ z=1+k \end{cases}$ et donc s'il appartient aussi au plan d'équation x+y-5=0 on doit trouver k tel que $(-1+2k)+(-2k+3)-5=0 \Leftrightarrow -3=0$ ce qui est impossible: La droite et le plan ne se coupent pas, ils sont donc parallèles.

III- Correction

Deux plans sont soit parallèles (éventuellement confondus) soit sécants selon une droite.
Or M(x;y;z) appartient aux deux plans si et seulement si:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ -3y-2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ z=1+5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=1+5t \end{cases}$$ avec t comme paramètre.

On reconnaît un système d'équations paramétriques de droite (ici avec y=t comme paramètre, si on choisit une autre inconnue comme paramètre, on obtient un autre système): leur intersection est une droite passant par le point de coordonnées (0;0;1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-3;1;5)$