Enoncé :

Pendant une expérience, l'altitude *h* en mètres d'un projectile lancé depuis le sol est donnée par la formule

$h(t)=-5t^2+100t$ (où *t* est le temps écoulé depuis le lancement, en secondes)

On veut savoir entre quels instants le projectile dépasse les 320m

1-a- Vérifier que $h(t)-320=(t-16)(20-5t)$

b- En déduire, à l'aide d'un tableau de signes, les solutions de $h(t)\geqslant 320$

2- On cherche maintenant à savoir à quel moment il retombe au sol (c.a.d quand on a h(t)=0 pour la seconde fois) . Déterminez cette solution.

3- On cherche cette fois à trouver l'altitude maximale du projectile.

a-Montrez que $h(t)=500-5(t-10)^2$

b- Conclure.

Correction :

1-a- D'une part $h(t)-320=-5t^2+100t-320$

et d'autre part si on développe $(t-16)(20-5t)=20t-5t^2-320+80t=-5t^2+100t-320$ on obtient la même chose ce qui prouve l'égalité. On sait que la forme développée est unique, elle est donc a privilégier lorsqu'on cherche a montrer que deux expressions sont égales.

b- Résoudre $h(t)\geqslant 320 \Leftrightarrow h(t)-320\geqslant 0$ revient d'après la question précédente à résoudre $(t-16)(20-5t)\geqslant 0$ et comme on a un produit (c'est une forme factorisée) et qu'on cherche son signe (plus petit que 0 signifie : négatif) on va utiliser un tableau de signes.

t	0	4		16	$+\infty$
t-16	-		-	0	+
20-5t	+	0	-		-
produit	-	0	+	0	-

Celui c-i permet de trouver les solutions, les nombres de l'intervalle [4;16] c.a.d que le projectile dépasse les 320m d'altitude de la 4ieme à la 16ieme seconde.

2-On résout $h(t)=-5t^2+100t=0 \Leftrightarrow t(-5t+100)=0 \Leftrightarrow t=0\, ou \;\; t=\frac{-100}{-5}=20$ car pour résoudre une équation de degré 2 on doit se ramener à « =0 » ce qui est déjà le cas, puis factoriser et ici on a *t* comme facteur commun, puis utiliser la propriété « un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul »

Le projectile retombe au sol au bout de 20 secondes.

3-a- On cherche à prouver une égalité entre deux expressions, le plus simple est de les développer :

$500-5(t-10)^2=500-5(t^2-2\times 10\times t+10^2)=500-5(t^2-20t+100)=500-5t^2+100t-500=-5t^2+100t=h(t)$

On a bien l'égalité demandée qui nous donne la forme canonique de *h.*

b- On remarquie avec la forme canonique qu'un carré étant toujours positif $h(t)=500-5(t-10)^2\leqslant 500$ pour tout *t* car $-5(t-10)^2\leqslant 0$ à cause du -5. Et de plus $h(10)=500$ car (10-10)²=0 donc 500 est le maximu de la fonction *h* atteint au bout de 10 secondes.

On peut aussi se servir de la symétrie de la parabole : Comme *h* est un polynôme de degré 2,avec un coefficient de t^2 négatif (ici c'est -5) on sait que sa courbe est une parabole qui admet un sommet correspondant à un maximum dont l'abscisse donne l'axe de symétrie. Or *h*(0)=*h*(20) donc l'axe de symétrie est la droite d'équation *x*=10, et donc on peut affirmer que le maximum sera *h*(10)=500.