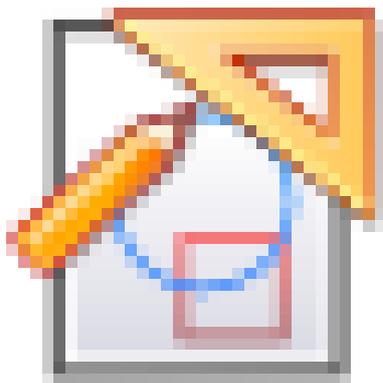


<http://stvalery-lyc.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article2878>

Tests de dépistage du covid-19 : l'éclairage des probabilités conditionnelles

- Ressources pédagogiques - ... par discipline - ..en mathématiques -



Date de mise en ligne : mardi 14 avril 2020

Copyright © Lycée de la Côte d'Albâtre - Tous droits réservés

Sommaire

- [Spécificité versus sensibilité](#)
- [Un facteur déterminant : \(...\)](#)
- [Conclusion : l'exemple du \(...\)](#)
- [Sources](#)

Les élèves de terminales (ancien programme, toutes spécialités confondues) et de premières (spécialité, et série technologiques) ont dans leur programme de mathématiques la notion de probabilité conditionnelle, laquelle doit être illustrée par les problématiques liées aux tests diagnostiques et de dépistage.

L'épidémie de covid-19 et les polémiques concernant la pertinence du recours aux tests diagnostiques est l'occasion de revenir sur cette notion plus en détail que durant l'année.

Spécificité versus sensibilité

Un test n'est jamais fiable à 100 %.

Deux types d'erreurs sont possibles :

- **les faux positifs** (un diagnostic positif alors que la personne n'est pas malade)
- **les faux négatifs** (la personne est malade mais n'est pas diagnostiquée).

Un test est ainsi caractérisé par deux paramètres qui sont tous deux des probabilités conditionnelles :

- **sa sensibilité** (la probabilité qu'une personne porteuse du virus soit positive)
- **sa spécificité** (la probabilité qu'une personne non infectée soit négative).

Pour les tests dont le caractère « positif » est déterminé selon une grandeur mesurée, c'est le choix du seuil à partir duquel on déclare une personne positive qui influe le plus sur la sensibilité et la spécificité du test (selon le choix du seuil on augmente une probabilité au détriment de l'autre).

Outre les difficultés liées au manque de tests, de réactifs, d'infrastructure... la problématique sur l'opportunité, ou non, d'un dépistage généralisé est spécifique à ces notions de faux positifs et faux négatifs :

- Un test qui crée de nombreux faux positifs entraîne une surcharge inutile du système de santé, des risques liés à une éventuelle médicalisation inutile, des risques psychologiques pour les personnes faussement diagnostiquées.
- Un test qui laisse passer de nombreux faux négatifs a peu d'intérêt dans le cadre du dépistage d'une maladie

très contagieuse puisqu'un grand nombre de porteurs du virus n'est pas dépisté comme tel et pense donc ne pas être porteur du virus.

Parmi les premiers tests élaborés pour le covid 19 (fin mars 2020), les hôpitaux disposaient du "reverse-transcription polymerase chain reaction" (RT-PCR, par prélèvement nasal) dont la sensibilité était évaluée par certains à 60 % et la spécificité à 75 %, ce qui laisse 40 % des porteurs du virus diagnostiqués négatifs, et 25 % des individus sains diagnostiqués positifs. La réalisation d'un second test permet faire chuter ces pourcentages mais cela explique en partie qu'ils soient réservés aux populations présentant des symptômes. Le recours à d'autres moyens de dépistage (scanner ou radio des poumons) permet aussi d'améliorer grandement ces probabilités.

Dans l'optique du dé-confinement, les tests de recherche d'anti-corps ou d'antigènes (par prélèvement sanguin) sont mis en avant par certains médecins notamment car leur spécificité est très bonne (plus de 99 %) ce qui permet d'éviter les faux positifs, donc d'affirmer que presque toutes les personnes positives ont été en contact avec le virus et donc, si elles sont guéries, de pouvoir les dé-confiner sans risque. Par contre sa sensibilité (70 % au mieux) ne permet pas d'en faire un outil de dépistage très efficace : 30 % des porteurs du virus ne seraient pas dépistés.

Fin avril(2020), selon des sources médicales, la sensibilité des tests RT-PCR serait plutôt de 70% et la spécificité excellente (99.9%) et pour les tests sanguins, sensibilité et spécificité seraient au-delà de 90%. Fin juin les premiers tests salivaires étaient annoncés avec une sensibilité de 70% et une spécificité de 95%.

La notice des auto-tests distribués aux enseignants dans les lycée en mai 2021 annonçait une spécificité de 99.8% et une sensibilité de 98.1%.

Les calculs de la partie suivantes sont basés sur les premières données disponibles et sont donc un peu caricaturaux, même si la problématique exposée (sur le rôle du taux de prévalence) reste pertinente, même pour des sensibilité et spécialité de plus de 90% comme le montre, en conclusion, l'exemple du VIH.

Un facteur déterminant : le taux de prévalence

Ce qui est plus étonnant et donne lieu régulièrement à des sujets de bac (trois exemples parmi ceux de la série S [BAC S - Métropole - juin 2011](#), [BAC S - Amérique du Sud - novembre 2015](#) et [BAC S - Métropole - juin 2014](#)), c'est que **la pertinence ou non du recours massif à un test ne dépend pas uniquement de ses valeurs intrinsèques (sensibilité et spécificité)**, mais aussi de la **prévalence** de la maladie (la proportion de la population qui est infectée).

Prenons l'exemple du covid-19 avec un test unique RT-PCR et une prévalence du Covid-19 dans la population que nous noterons p (comprise mi-avril, entre moins de 1 % et 15 % selon les estimations et les régions).

Si on représente la situation par un tableau à double-entrée pour 10000 personnes avec un taux de prévalence de 3 %, une sensibilité de 60 % et un spécificité de 75 % :

simulation d'un test RT-PCR avec

	porteurs	non-porteurs	total
positifs	180	2425	2605
négatifs	120	7275	7395

Tests de dépistage du covid-19 : l'éclairage des probabilités conditionnelles

total	300	9700	10000
-------	-----	------	-------

On remarque que **parmi les 2605 personnes diagnostiquées positives, seulement 180 seraient malades.** Cette probabilité, **la probabilité d'être malade** (ou porteur du virus, ou ayant été en contact avec le virus, selon le type de tests et de maladies) **parmi les personnes positives** est appelé la **valeur diagnostique positive du test**, notée généralement $Vp(p)$ car elle dépend de la prévalence p de la maladie. Ici on obtient $Vp(3\%)=180/2605$ environ 7 %. Un tel test dans une population ne présentant que 3 % de personnes infectées n'a pas beaucoup d'intérêt pour diagnostiquer les personnes atteintes : On savait déjà que 40 % des malades avaient un diagnostic négatif, on découvre que 93 % des diagnostics positifs concernent des personnes non-malades. Un tel test présente néanmoins un intérêt pour le dépistage, en effet sa valeur prédictive négative $Vn(p)$, la probabilité qu'une personne diagnostiquée négative ne soit pas malade, est correcte lorsque très peu de personnes sont atteintes : $Vn(3\%)=7275/7395$ soit 98,4 %. Les personnes ayant un test négatif sont probablement saines (mais on s'en doute un peu lorsque la maladie touche seulement 3 % de la population).

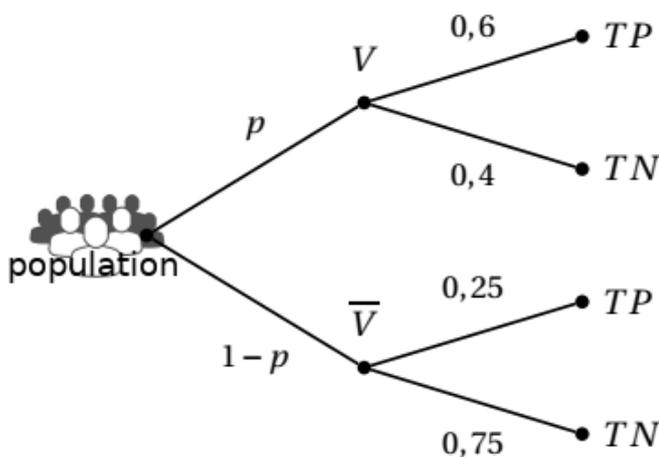
Si on procède de même pour les tests recherchant les anticorps ou les antigènes avec une sensibilité de 70 % et une spécificité de 99 %, en gardant une prévalence de 3 % on obtient :

simulation d'un test de type recherche de prévalence de 3%

	porteurs	non-porteurs	total
positifs	210	97	307
négatifs	120	9603	9723
total	300	9700	10000

Ce qui donne $Vp(3\%)=210/307$ environ 68 % ce qui devient intéressant et $Vn(3\%)=9603/9723$ près de 98,8 % ce qui n'est pas tellement plus élevé qu'avec les tests RT-PCR.

En effet si on modélise la situation par un arbre pondéré (V et \bar{V} : la personne porte ou non le virus ; TP et TN : le résultat du test est positif ou négatif) :



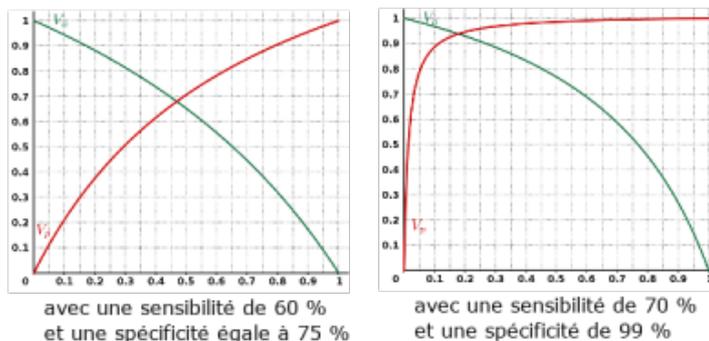
La probabilité qui correspond à la valeur diagnostique positive est donnée (en fonction de la prévalence p , selon ici une sensibilité de 60 % et une spécificité de 75%) par :

$$Vp(p) = P_{TP}(V) = \frac{P(V \cap TP)}{P(TP)} = \frac{P(V) \times P_v(TP)}{P(V) \times P_v(TP) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{v}}(TP)} = \frac{0,6p}{0,6p + 0,25(1-p)} = \frac{0,6p}{0,35p + 0,25}$$

et la valeur diagnostique négative par :

$$Vn(p) = P_{TN}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}) \times P_{\bar{v}}(TN)}{P(V) \times P_v(TN) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{v}}(TN)} = \frac{0,75(1-p)}{0,4p + 0,75(1-p)} = \frac{0,75 - 0,75p}{0,75 - 0,35p}$$

Les courbes ci-dessous illustrent l'évolution de ces fonctions selon la prévalence p pour les deux tests ici étudiés.



On remarque que le test 1(RT-PCR) utilisé seul n'a pas une bonne valeur diagnostique positive, alors que le test 2 (type recherche d'anticorps ou d'antigènes) atteint 90 % lorsque la prévalence du virus est d'environ 10 % ce qui est déjà le cas (mi-avril) selon certaines estimations dans les zones les plus touchées.

La valeur diagnostique négative est en revanche correcte pour les deux tests dans les régions où la présence du virus reste faible, et très moyenne dès que le virus infecte une large partie de la population.

Vous pouvez faire d'autres simulations en modifiant les paramètres ci-dessous (vous pouvez notamment utiliser comme estimations (fin avril 2020) une sensibilité de 70% et une spécificité de 99% pour les tests RT-PCR et une sensibilité et une spécificité de 95% pour les tests sérologiques) :

Conclusion : l'exemple du VIH

On voit ici, qu'en plus de la **sensibilité** et de la **spécificité** des tests disponibles, la **prévalence** d'une maladie est un facteur essentiel dans la mise en place d'un dépistage généralisé (ou sa restriction à une population particulièrement touchée : ceux qui présentent les symptômes, leurs proches, les soignants...). **Ainsi pour le VIH, alors que l'on dispose d'un test sensible à 99,9 % et spécifique à 99,5 %**, le dépistage se concentre sur les populations à risques (dans les pays occidentaux) notamment en raison de la faiblesse de la valeur diagnostique dans la population générale.

Pour un taux de prévalence de 0,3 % (ordre de grandeur pour la France) la valeur diagnostique positive serait de 37,5 % seulement : près de deux tiers des dépistés ne seraient pas porteurs du virus (d'où la nécessité d'une contre-expertise).

La nécessité de commencer le traitement le plus tôt possible incite néanmoins certains spécialistes à réclamer un dépistage généralisé.

Les raisons qui poussent les pouvoirs publics à mettre en place ou non un dépistage systématique sont nombreuses et d'ordres divers (coût, disponibilité, efficacité, saturation du système médical, risques psychologiques pour les faux positifs, absence éventuelle de traitement ou au contraire, nécessité d'un traitement précoce...) mais il ne faut pas négliger l'aspect purement mathématique induit pas le côté anti-intuitif de la formule de Bayes (qui permet, en gros, d'inverser les causes et les conséquences dans un calcul de probabilité : on peut très bien avoir un test qui détecte 99.9% des malades mais qui ne donne que 37.5% de malades parmi les personnes positives comme dans l'exemple du VIH...)

Sources :

[qualité diagnostique des tests biologiques](#) : voir notamment la figure 1 qui illustre avec deux distributions de lois normales la difficulté à fixer le seuil de positivité d'un test mesurant une grandeur variable selon les individus.

sfmu.org

[médisite](#)

[données sur le test du VIH](#)

[valeurs numériques sur le Covid en partie reprises de cette étude](#)

Animations Geogebra, relecture et remise en forme par Philippe Pety.